USTHB 2017-2018 Semestre 2 — **Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques — **2ème année Lic Math**

Série d'exercices n° 0 : Nombres complexes

Exercice 1 :

Écrire les nombres complexes suivants sous forme $x+iy, x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\dfrac{(2-i)(1+3i)}{2+3i}$, **b)** $\dfrac{2+5i}{1-i}+\dfrac{2-5i}{1+i}$, **c)** $\dfrac{a+ib}{a-1+ib}, a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Trouver le module et l'argument principal des nombres complexes suivants :

a) $z=-2+2\sqrt{3}i$, **b)** $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$, **c)** $z=\cos\alpha-i\sin\alpha$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Exercice 3 :

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z=1-\sin\alpha+i\cos\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, **b)** $z=\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 :

Déterminer les parties réelle et imaginaire de

a) $z=(1+i)^{2k+1}, k \in \mathbb{Z}$, **b)** $z=\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\beta+i\sin\beta}$, $\alpha, \beta \in]0, \pi[$.

Exercice 5 :

Calculer $i^{\frac{1}{6}}$ et représenter les résultats dans le plan complexe.

Exercice 6 :

Calculer les sommes suivantes : **a)** $\sin x+\sin 2x+.....+\sin nx$, **b)** $\cos x+\cos 2x+.....+\cos nx$.

Exercice 7 :

Résoudre les équations : **a)** $(z-1)^3=1$, **b)** $z^4+2=0$, **c)** $z^5-1=i$.

Exercice 8 :

Si $\alpha+i\beta$ est racine de $a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n=0$ où $a_0 \neq 0, a_1, ..., a_n, \alpha, \beta$ sont réels et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\alpha-i\beta$ est aussi racine. Ce résultat est souvent énoncé sous la forme suivante : les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont deux à deux conjuguées.

Exercice 9 :

Si $\operatorname{Im} z>0$, montrer que $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)>0$ si et seulement si $|z|<1$.

Exercice 10 :

Montrer que si $z^2 = \overline{z}^2$, alors $\operatorname{Re} z = 0$ ou bien $\operatorname{Im} z = 0$.

Exercice 11 :

Montrer que les nombres z_1, z_2 et z_3 sont alignés si et seulement si $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = 0$.

Exercice 12 :

Soient z_1 et z_2 deux éléments dans $\mathbb{C}^*$.

Montrer que si $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ou bien si $\Big||z_1| - |z_2|\Big| = |z_1 - z_2|$, alors $z_1 = kz_2$ avec $k > 0$.

Exercice 13 :

Démontrer l'identité $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$.

En donner une interprétation géométrique.

Exercice 14 :

Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe.

a) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| < 3\}$, **b)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| > 3\}$, **c)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im} z < 1\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 3i| \leq |z - 3|\}$, **e)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z^2 - z| \leq 1\}$, **f)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |1 - z| \leq 3\,(1 - |z|)\}$.

Exercice 15 :

Parmi les ensembles suivants, trouver ceux qui sont ouverts, fermés, connexes, bornés, compacts.

a) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} z > 0\}$, **b)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| \geq 3\}$, **c)** $\{1, i, -2, 1 + 3i\}$, **d)** $\mathbb{C}$,

e) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 1| < |z + 1|\}$, **f)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 1| < 1\}$.