USTHB 2017-2018 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Analyse complexe
$2^{\text{ème}}$ année Lic Math

Série d'exercices n° 1 : Fonctions complexes

Exercice 1 :

Soit $w = f(z) = z^2$.

a) Montrer que la droite joignant les points $z_1 = -2+i$ et $z_2 = 1-3i$ est transformée par $w = f(z) = z^2$ en une courbe passant par $f(z_1)$ et $f(z_2)$ dont on déterminera l'équation.

b) Si c_1 et c_2 sont des constantes réelles quelconques, déterminer les ensembles de points du plan de la variable z qui sont transformés en les droites (1) $u = c_1$, (2) $v = c_2$ du plan de la variable w, au moyen de la fonction f.

Exercice 2 :

Soit $w^5 = z$ et supposons que pour la valeur particulière $z = z_1$ nous ayons $w = w_1$.

a) Si partant du point z_1 dans le plan de la variable z on décrit dans le sens direct un contour fermé entourant l'origine, montrer que la valeur de w après retour en z_1 est $w_1 e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

b) Quelles sont les valeurs de w en z_1 après 2, 3, ..., tours complets autour de l'origine ?

c) Traiter a) et b) si le contour n'entoure pas l'origine.

Exercice 3 :

Soit $f(z) = z^3$, en utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim\limits_{z\to i} f(z) = -i$.

Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}$, **b)** $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^{2n}+1}{z-i}, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 :

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\left(\mathrm{Re}\left(z^2\right)\right)^2}{|z^2|} & \text{si } \; z \neq 0 \\ 0 & \text{si } \; z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 6 :

Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$f(z) = f(x+iy) =$ le nombre des racines complexes non reélles du polynôme $p(t) = t^2 + xt + y$.

Exercice 7 :

Séparer les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

a) $f(z) = e^{-z}$, **b)** $f(z) = \sin z$, **c)** $f(z) = \mathrm{Ch}\, z$, **d)** $f(z) = 2^{z^2}$, **e)** $f(z) = z^{2-i}$.

Exercice 8 :

Démontrer les relations suivantes :

a) $|\sin z| = \sqrt{\mathrm{Ch}^2\, y - \cos^2 x}$, **b)** $|\cos z| = \sqrt{\mathrm{Ch}^2\, y - \sin^2 x}$,

c) $|\mathrm{Sh}\, z| = \sqrt{\mathrm{Ch}^2\, x - \cos^2 y}$, **d)** $|\mathrm{Ch}\, z| = \sqrt{\mathrm{Ch}^2\, x - \sin^2 y}$.

Exercice 9 :

Démontrer que si $|\sin z| \leq 1$ pour tout z, alors z est réel.

Exercice 10 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\mathrm{Im}(\sin z) = 0$, **b)** $\mathrm{Re}(\mathrm{Sh}\, z) = 0$, **c)** $\sin z = \frac{4}{3}i$, **d)** $\mathrm{Sh}\, z = \frac{i}{2}$, **e)** $e^z = -2$.

Exercice 11 :

Démontrer que $e^{(\mathrm{Log}\, z)} = z$ et montrer que l'égalité $\mathrm{Log}(e^z) = z$ n'est pas toujours vérifiée.

Exercice 12 :

Calculer **a)** $\mathrm{Log}(1+i)$, **b)** i^i, **c)** $(1-i)^{3-3i}$.