USTHB 2017-2018 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Analyse complexe
$2^{\text{ème}}$ année Lic Math

Série d'exercices n° 2 : Dérivation dans $\mathbb{C}$

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = |z^2|$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que la limite $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$ n'existe pas.

b) Montrer que pour tout $z \neq z_0$ on a $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \overline{z} + z_0 \left(\dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} \right)$.

c) En déduire que f n'est pas dérivable en aucun point sauf en $z = 0$.

Exercice 2 :

Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas dérivables aux points indiqués.

a) $f(z) = \overline{z}$, pour $z \in \mathbb{C}$ **b)** $f(z) = \operatorname{Re} z$, pour $z \in \mathbb{C}$, **c)** $f(z) = \operatorname{Im} z$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 3 :

Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué.

a) $f(z) = (\overline{z} + i)^2$, sur $\mathbb{C}$, **b)** $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

c) $f(z) = \operatorname{Re} \left(\dfrac{z}{z - 1} \right)$, sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, **d)** $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$, sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4 :

Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ de partie réelle $|z|^2$.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z^4|} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que la fonction f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann au point $(0, 0)$.

b) La fonction f est-elle dérivable au point $(0, 0)$?

c) Discuter le résultat.

Exercice 6 :

Supposons que f est holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$ et que à chaque point $z \in D$, soit $f(z) = 0$ ou bien $f'(z) = 0$. Montrer que f est constante sur D.

Exercice 7 :

Supposons que f est une fonction entière de la forme $f(z) = u(x) + iv(y)$.

Montrer que f est un polynôme linéaire.

Exercice 8 :

Montrer que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Exercice 9 :

Montrer que la fonction u définie ci-dessous est harmonique.

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Trouver une fonction v pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Exercice 10 :

Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes?

a) $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2-1}$, **b)** $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)}$, **c)** $f(z) = \dfrac{\operatorname{Log}(z-2)}{(z^2+2z+2)^4}$.