USTHB 2017-2018 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Analyse complexe
$2^{\text{ème}}$ année Lic Math

Série d'exercices n° 3 : Intégration dans $\mathbb{C}$

Exercice 1 :

Évaluer les intégrales $I = \int_C \overline{z}dz$ et $J = \int_C z\cos z dz$ de $z = 0$ à $z = 4 + 2i$ le long de la courbe C dans les cas suivants :

a) la courbe C est la parabole $x = y^2, 0 \leq y \leq 2$,

b) la courbe C formée des segments joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4 + 2i$,

c) la courbe C est le segment de droite d'extrémités 0 et $4 + 2i$.

Discuter les résultats obtenus.

Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_C z^2 + z\overline{z}dz$, le long de $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$,

b) $\int_C \operatorname{Re}(\sin z)\cos z dz$, le long de $C = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}, |\operatorname{Im} z| \leq 1\right\}$,

c) $\int_C \operatorname{Arg} z dz$, le long du cercle unité parcouru dans le sens positif.

Exercice 3 :

a) Définir la détermination de la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ pour laquelle $\sqrt{1} = -1$, puis vérifier par deux méthodes différentes que $\int_C \frac{1}{\sqrt{z}}dz = 2(1 - i)$, le long de $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

b) Montrer que $\int_1^i \frac{1}{z} \operatorname{Log}^3 z dz = \frac{\pi^4}{64}$, où $\operatorname{Log} z$ est la détermination principale du logarithme.

c) On considère la détermination de $z \mapsto \sqrt[4]{z}$ pour laquelle $\sqrt[4]{1} = 1$.

Vérifier que $\int_C \frac{1}{\sqrt[4]{z^3}}dz = 2\sqrt{2} - 4 + 2\sqrt{2}i$, le long de $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Exercice 4 :

Soient $R > 0, n \in \mathbb{Z}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} z_0 = 0$. On pose $C_{R,z_0} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Calculer $I_{R,z_0} = \int_{C_{R,z_0}} (z - z_0)^n dz$ puis en déduire $\lim_{R \to +\infty} I_{R,z_0}$.

Exercice 5 :

Évaluer $\oint_C \frac{1}{z - z_0}dz$ où C désigne une courbe fermée et $z = z_0$ est

a) à l'extérieur de C, **b)** à l'intérieur de C.

Exercice 6 :

En utilisant le lemme de Goursat [si f est holomorphe dans un domaine D, alors pour tout triangle T contenu ainsi que son intérieure dans D on a $\oint_T f(z)\,dz = 0$.], démontrer le théorème de Cauchy pour tout contour polygonal simple et fermé.

Exercice 7 :

Évaluer les intégrales $\oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z+2}dz$, $\oint_{|z|=2} \frac{e^z+6}{z^2+9}dz$ et $\oint_{|z|=2} \frac{z+2}{2+\sin z}dz$.

Exercice 8 :

Soient D un domaine convexe dans $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que$|f'(z)| \leq M$ dans D. Montrer que $|f(z_2) - f(z_1)| \leq M|z_2 - z_1|$ pour tout $z_1, z_2 \in D$.

Exercice 9 :

Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et C une courbe fermée parcouru dans le sens positif et contenu ainsi que son intérieur dans D. Soient z_1 et z_2 deux points à l'intérieur de C. En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer $\oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz$.

Qu'obtient-on lorsque $z_1 \to z_2$?

Exercice 10 :

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer

1) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$ **2)** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{Ch}(iz)}{z^2+4z+3}dz$ **3)** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{Sh}\left(\frac{\pi}{2}(i+z)\right)}{z^2-2z}dz$ **4)** $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2+2z}dz$

5) $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}dz$ **6)** $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz$ **7)** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{Ch} z}{(z+1)^3(z-1)}dz$ **8)** $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

Exercice 11 :

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les intégrales

$$I_n = \oint\limits_{|z|=1} \tfrac{1}{z}\left(z + \tfrac{1}{z}\right)^{2n} dz \text{ et } J_n = \oint\limits_{|z|=1} \tfrac{1}{z}\left(z - \tfrac{1}{z}\right)^{2n} dz.$$

En déduire que $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin^{2n} t dt = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\pi$. Obtenir aussi $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n+1} t dt$ et $\int\limits_0^{2\pi} \sin^{2n+1} t dt$.

Exercice 12 :

a) Soit f une fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) telle que $|f(z)| \geq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Montrer que f est constante.

b) Montrer que tout polynôme non constant admet au moins une racine.

Exercice 13 :

a) Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe admet un nombre fini de zéros $z_1, z_2, \cdots, z_k$ avec multiplicités $n_1, n_2, \cdots, n_k$. Montrer qu'il existe une fonction $g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe qui ne s'annule pas dans D vérifiant $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{n_j}{z-z_j}$ pour tout $z \in D$.

b) Soit C une courbe fermée dans D ne contient aucun zéro de f. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=0}^{k} n_j \operatorname{Ind}(z_j, C),$$

où $\operatorname{Ind}(z_j, C) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-z_j}dz$ est le nombre de tours que fait C autour de z_j.

c) *Application* : En déduire que $\oint\limits_{|z|=2} \frac{2z^4+2z^3+z^2-1}{(z+1)^2(z-1)}dz = 6\pi i$.