

Exercice 1 :

Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.

a) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, z=1$; b) $f(z) = (z-3) \sin \frac{1}{z+2}, z=-2$; c) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}, z=-2$.

Exercice 2 :

Développer $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ en série de Laurent valable pour

a) $1 < |z| < 3$, b) $|z| > 3$, c) $0 < |z+1| < 2$, d) $|z| < 1$.

Exercice 3 :

- a) Développer $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$ en série de Laurent au voisinage de $z=2$.
b) Déterminer le domaine de convergence de cette série.
c) Classer les singularités de f .

Exercice 4 :

Trouver les résidus de (a) $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ et (b) $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ en tous les pôles à distance finie.

Exercice 5 :

Trouver les résidus des fonctions suivantes en tous les points singuliers.

a) $f(z) = e^{z^2+1/z^2}$, b) $f(z) = \frac{e^{-1/z^2}}{1+z^4}$, c) $f(z) = \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, d) $f(z) = e^z \sin \frac{1}{z}$, e) $f(z) = z^n e^{1/z}$.

Exercice 6 :

Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz, t \in \mathbb{R}^*$ le long du cercle C d'équation (a) $|z|=3$ et (b) $|z|=1$.

Exercice 7 :

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1} dz$, b) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z - z}{z^3(z+1)} dz$, c) $\oint_{|z+1|=3} \frac{e^{2iz} - 5z}{z+2i} dz$, d) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \sin z} dz$.

Exercice 8 :

Évaluer (a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$ et (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx$.

Exercice 9 :

Évaluer (a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos t + \sin t} dt$ et (b) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \sin t} dt, a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > |b|$.

Exercice 10 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, m > 0$.

Exercice 11 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 12 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, 0 < p < 1$.

Exercice 13 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Ch}(ax)}{\operatorname{Ch} x} dx = \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)},$ où $|a| < 1$.

Exercice 14 :

Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx = \pi \operatorname{Log} 2$.