USTHB 2017-2018 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Analyse complexe
$2^{\text{ème}}$ année Lic Math

Test n^{0}2 - 16 mai 2018. Durée : 30 minutes

Nom et Prénom :..

Matricule :..

$\overline{}$
15

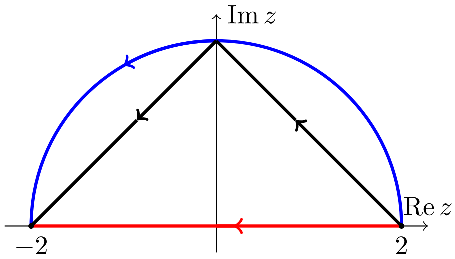
Exercice 1 (7,5 pts.) : a) Calculer $\displaystyle\int_C (\overline{z}+2z)\,dz$ le long

1. du cercle $|z|=2$ de 2 à -2 dans le sens direct,

2. du segment de droite joignant 2 et -2.

3. la ligne brisée formée par les segments de droite 2 à $2i$ et $2i$ à -2,

b) Discuter les résultats obtenus.



Réponse.

a)

1. Le demi cercle de 2 à -2 du cercle $|z|=2$ peut être paramétré par $z=2e^{it},\ t\in[0,\pi]$.

Les points 2 et -2 du demi cercle, correspondent respectivement à $t=0$ et $t=\pi$.

On a $dz=d\left(2e^{it}\right)=2ie^{it}dt$ et $\overline{z}=2e^{-it}$. L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{\pi}\left(2e^{-it}+4e^{it}\right)2ie^{it}dt &= \int_0^{\pi}\left(4i+8ie^{2it}\right)dt=\left[4it+4e^{2it}\right]_0^{\pi}\\ &= 4i\pi+4e^{2i\pi}-(0+4)=4i\pi+4-4=4i\pi.\end{aligned}$$

2. Sur le segment de droite joignant 2 et -2, on a $z=t,\overline{z}=t$ et $dz=dt$ avec t varie entre 2 et -2.

L'intégrale donnée vaut

$$\int_C(\overline{z}+2z)\,dz = \int_{t=2}^{-2}(t+2t)\,dt=\int_2^{-2}3tdt=\left[\tfrac{3}{2}t^2\right]_2^{-2}=6-6=0.$$

3. Sur le segment de droite joignant 2 et $2i$, on a $z=2+(2i-2)\,t,\ t\in[0,1]$ et $dz=(2i-2)\,dt$.

Alors

$$\begin{aligned}\int_C(\overline{z}+2z)\,dz &= \int_{t=0}^{1}\left(2+(-2i-2)\,t+4+(4i-4)\,t\right)(2i-2)\,dt\\ &= (2i-2)\int_{t=0}^{1}\left(6-(6-2i)\,t\right)dt=(2i-2)\,(3+i)=-8+4i.\end{aligned}$$

Pour le segment de droite joignant $2i$ et -2 on a $z=2i+(-2-2i)\,t,\ t\in[0,1]$ et $dz=(-2-2i)\,dt$.

et donc

$$\begin{aligned}\int_C(\overline{z}+2z)\,dz &= \int_{t=0}^{1}\left(-2i+(-2+2i)\,t+4i+(-4-4i)\,t\right)(-2-2i)\,dt\\ &= (-2-2i)\int_0^1\left(2i-(6+2i)\,t\right)dt=(-2-2i)\,(-3+i)=8+4i.\end{aligned}$$

Le résultat demandé est donc $=-8+4i+8+4i=8i$.

b) La fonction à intégrer $f(z) = \overline{z} + 2z$ n'est pas holomorphe ($\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = 1 \neq 0$), donc l'intégrale dépend du chemin suivi et pas seulement du point d'arrivé et du point de départ.

Exercice 2 (7,5 pts.) : On note Γ le cercle unité et soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U contenant le disque $\overline{D}_1(0)$.

a) Exprimer en fonction des valeurs de f l'intégrale $I = \displaystyle\int_\Gamma \left(2 + z + \tfrac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz$.

b) En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\tfrac{t}{2}\right) dt$.

c) Pour une fonction f convenablement choisie, déterminer $K = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4\left(\tfrac{t}{2}\right) dt$.

Réponse.

a) On a, d'après les formules intégrales de Cauchy,

$$I = \int_\Gamma 2\frac{f(z)}{z} dz + \int_\Gamma f(z)\, dz + \int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2} dz = 2i\pi \left(2f(0) + 0 + f'(0)\right).$$

b) D'autre part, on paramètre le cercle unité par l'application $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. On trouve

$$I = \int_0^{2\pi} \left(2 + e^{it} + e^{-it}\right) \frac{f(e^{it})}{e^{it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i\left(2 + 2\cos t\right) f\left(e^{it}\right) dt.$$

Comme $2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 + \cos t$, alors $I = 4i \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\tfrac{t}{2}\right) dt$. On en déduit

$$J = \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{I}{4i} = \frac{\pi}{2}\left(2f(0) + f'(0)\right).$$

c) Pour $f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$, on aura

$$f\left(e^{it}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{it} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2} i \sin t = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} i \sin t,$$

et donc

$$J = \int_0^{2\pi} \cos^4\left(\frac{t}{2}\right) dt + i\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin t \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{\pi}{2}\left(2f(0) + f'(0)\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{3\pi}{4}.$$