Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

Sommaire

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques définitions essentielles pour la suite de ce cours.

1.1 Notion d'équation différentielle

1.1.1 Différents types d'équations différentielles

Définition 1 (Équation différentielle ordinaire)

On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) une relation entre une variable réelle indépendante t, une fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ et ses dérivées $y', y'', \cdots, y^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*$.
L'ordre d'une EDO est défini comme étant l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation. Ainsi, une équation différentielle d'ordre n se présente sous la forme

$$F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

La fonction F est une fonction de $n+2$ variables.
La fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ de la variable réelle t est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^k, k = 2, 3, \cdots$.
On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).

Exemple 1

a) $y' + ty = e^t$ est une équation différentielle du premier ordre.

b) $y'' + 4ty = 0$ est une équation différentielle du second ordre.

c) $y^{(9)} - ty'' = t^2$ est une équation différentielle d'ordre 9. ∎

Définition 2 (Équation différentielle normale)

Si l'équation $F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ est résoluble par rapport à $y^{(n)}$, alors l'EDO prend sa forme *normale* ou *résolue*

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right).$$

Exemple 2

La forme normale d'une équation différentielle du premier ordre ($n = 1$), $F(t, y, y') = 0$ s'écrit $y' = f(t, y)$. Par exemple, $y' = ty^2 + e^t$. ∎

Remarque 3

Dans le cas où une équation différentielle n'est pas résoluble par rapport à $y^{(n)}$, elle est dite *implicite*.

Exemple 3

L'équation différentielle $y' + e^{y'} = y + t$ ne peut pas se mettre sous forme résolue. ∎

Définition 4 (Équation différentielle autonome)
Une équation différentielle *autonome* est un cas particulier important des équations différentielles où la variable t n'apparaît pas dans l'équation. C'est une équation de la forme

$$F\left(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Il s'agit du cas où la fonction F ne dépend pas explicitement de t.

Exemple 4

L'équation $y' = f(y) = y^2 + e^y$ est une équation différentielle autonome du premier ordre. ■

1.1.2 Équations différentielles linéaires

Donnons maintenant une classification par linéarité.

Définition 5 (Équation différentielle linéaire)
On appelle équation différentielle *linéaire* toute équation de la forme :

$$a_n(t)\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)\, y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = g(t),$$

où les fonctions $t \mapsto a_j(t), 0 \leq j \leq n$, sont appelées coefficients de l'équation.
La fonction $t \mapsto g(t)$ est appelée le second membre. Si g est nulle, alors l'équation est dite *homogène* ou sans second membre.
L'équation différentielle

$$a_n(t)\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)\, y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0,$$

est appelée équation différentielle homogène associée.
Si $a_j(t), 0 \leq j \leq n$, sont des constantes, on parle d'équation différentielle linéaire à *coefficients constants.*

Exemple 5

L'équation différentielle $(t^2 + 1)\, y'' = e^t y + \operatorname{Arctg} t$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et son équation différentielle homogène associée est $(t^2 + 1)\, y'' = e^t y$. ■

Exemple 6

Les équations différentielles suivantes ne sont pas linéaires.

a) $y' + y^2 - t = 0$	**b)** $y'' - e^y y' = 2y$	**c)** $y''' + tyy' - 2y = \sin t$
d) $(2 - y)\, y' + y = \ln t$	**e)** $y'' + \sin y = 1$	**f)** $y^{(5)} + y^2 y' = t$. ■

1.2 Notions de solutions

1.2.1 Solution d'une équation différentielle

Définition 6 (Solution d'une équation différentielle)

On appelle *solution* (ou intégrale) de l'équation différentielle $F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ un couple (I, y), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une fonction n fois dérivable définie sur I telle que pour tout t de I, on ait

$$F\left(t, y\left(t\right), y'\left(t\right), y''\left(t\right), \cdots, y^{(n)}\left(t\right)\right) = 0.$$

Résolution d'une équation différentielle

Résoudre ou intégrer une équation différentielle consiste à rechercher :

- un intervalle I de $\mathbb{R}$,
- une fonction y suffisamment dérivable et vérifiant l'équation différentielle sur I.

Exemple 7

L'équation $y' - y = 0$ admet $(I, y) = ([0, 1], \exp)$ comme solution, mais aussi $(I, y) = (\mathbb{R}, \exp)$. La première est la restriction de la seconde. ▪

1.2.2 Conditions initiales

Définition 7 (Conditions initiales)

On peut aussi rechercher des solutions qui vérifient certaines conditions en un point t_0 : $y\left(t_0\right) = y_0,\ y'\left(t_0\right) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_{n-1}$.

On appelle ce type de condition des *conditions initiales.*

Exemple 8

La fonction $t \mapsto y\left(t\right) = \operatorname{tg} t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y^2 = 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifie la condition initiale $y\left(0\right) = 0$. ▪

Exemple 9

La fonction $t \mapsto y\left(t\right) = \operatorname{Ch} t$ est solution de l'équation différentielle $\left(y'\right)^2 - y^2 = -1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale $y\left(0\right) = 1$. ▪

1.2.3 Problème de Cauchy

Définition 8 (Problème de Cauchy)
On appelle problème de *Cauchy* la donnée d'une équation différentielle résolue d'ordre n,

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

et de n conditions initiales

$$y\left(t_0\right) = y_0,\ y'\left(t_0\right) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_{n-1}.$$

On verra plus tard que dans un cadre assez fréquent, les problèmes de Cauchy admettent en général une unique solution définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1.2.4 Solutions générale, particulière et singulière

Résoudre ou intégrer une équation différentielle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Les solutions de l'équation différentielle d'ordre n, $F\left(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ dépend en général de n constantes arbitraires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Définition 9 (Solutions générale et particulière)

- La famille de solutions (y_λ) d'indice $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ est appelée solution (ou intégrale) *générale.*
- Une solution particulière est obtenue en imposant une condition (initiale) sur y_λ.

Définition 10 (Solutions singulières)
Il arrive parfois qu'en plus de la solution générale on ait des solutions particulières $y = \varphi_0\left(t\right), y = \varphi_1\left(t\right), \cdots$, qui ne s'obtiennent pour aucune valeur de λ : on dit que ce sont des solutions *singulières.*

Exemple 10
On peut vérifier que $y^2 + (yy')^2 = 1$ admet pour solutions $y_\lambda = \pm\sqrt{1-(t-\lambda)^2}, \lambda \in \mathbb{R}$ et deux fonctions $\bar{y}_1 = -1, \bar{y}_2 = 1$. Les solutions $\bar{y}_1$ et $\bar{y}_2$ qui n'appartiennent pas à la famille y_λ sont des solutions singulières. ∎

1.2.5 Solutions maximales

Définition 11 (Prolongement)

Soient $y : I \to \mathbb{R}^k$ et $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}^*$ deux solutions de $F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$, on dit que $\tilde{y}$ est un *prolongement* de y si $\tilde{I} \supset I$ et $\tilde{y}|_I = y$.

Définition 12 (Solution maximale)

On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^k$ est *maximale* si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^k$ avec $\tilde{I} \supsetneq I$.

Exemple 11

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ définie sur $]0, +\infty[$ est une solution maximale de l'équation $y' + y^2 = 0$. ▪

Théorème 13

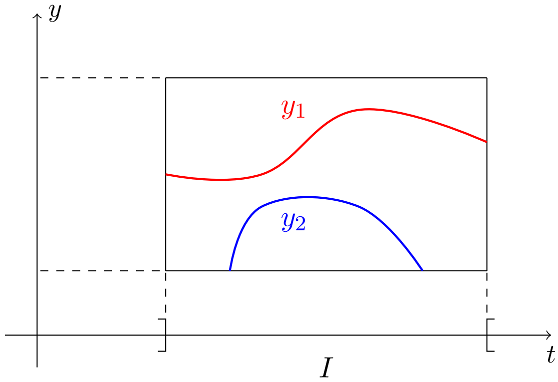
Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).

Démonstration. Voir le livre de Demailly [1, page 128] ■

1.2.6 Solutions globales

Définition 14 (Solution globale)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une solution (I, y) est dite *globale* dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.



Remarque 15

Toute solution globale est maximale, mais une solution maximale peut tout à fait ne pas être globale.

Sur la figure ci-dessus par exemple, y_1 est globale tandis que y_2 est maximale mais non globale.

Exemple 12

On considère l'équation différentielle $y' = y^2$. Cherchons les solutions de cette équation.

On a d'une part $y(t) \equiv 0$ est une solution.

Si y ne s'annule pas, $y' = y^2$ s'écrit sous forme $\frac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration

$$-\frac{1}{y(t)} = t + C \text{ ou } y(t) = -\frac{1}{t+C}.$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -C[$ et sur $]-C, +\infty[$; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $y(t) \equiv 0$ est la seule solution globale de $y' = y^2$. ∎

1.2.7 Courbes intégrales d'une équation différentielle

Définition 16 (Courbes intégrales)

Les courbes représentatives des solutions maximales d'une équation différentielle sont appelées *courbes intégrales*.

Exemple 13

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ty' - y = 0$ est donné par l'ensemble des fonctions de la forme $y = \lambda t$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, les courbes intégrales de cette équation sont des droites qui passent par l'origine. ∎

Exemple 14

L'équation différentielle $y'' = 0$ admet pour courbes intégrales les droites d'équation $y = at + b$, c'est-à-dire l'ensemble des droites du plan non parallèles à l'axe Oy. ∎

Plus généralement la résolution d'une équation différentielle consiste à déterminer ses courbes intégrales, soit par une équation $y = f(t)$, soit par $\varphi(t, y) = 0$, soit même géométriquement.

1.3 Réduction de l'ordre d'une équation différentielle à 1

Une équation différentielle d'ordre n

$$F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

peut se lire aussi comme une équation du premier ordre de fonction inconnue

$$v(t) = (y_0(t), y_1(t), \cdots, y_{n-1}(t)).$$

L'équation se réécrit en effet, en notant $y_0 = y$:

$$y_1 = y_0', y_2 = y_1', \cdots, y_{n-1} = y_{n-2}', F\left(t, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_{n-1}'\right) = 0$$

ou encore, en définissant G par

$$G(t, v_0, \cdots, v_{n-1}, w_0, \cdots, w_{n-1}) = (w_0 - v_1, \cdots, w_{n-2} - v_{n-1}, F(t, v_0, \cdots, v_{n-1}, w_{n-1}))$$

on obtient

$$G(t, v, v') = 0.$$

Si l'équation d'ordre n était sous forme normale ou résolue

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

l'équation équivalente d'ordre 1 le sera aussi :

$$v' = g(t, v)$$

avec $g(t, v_0, \ldots, v_{n-1}) = (v_1, \ldots, v_{n-2}, f(t, v_0, \cdots, v_{n-1}))$.

De plus, dans les deux cas (forme implicite ou forme résolue), si l'équation d'ordre n était autonome, celle d'ordre 1 le sera aussi et si l'équation était linéaire, elle le reste.

Exemple 15

L'équation différentielle linéaire d'ordre 2, normale et autonome $y'' = y$ se transforme en équation du premier ordre à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. La fonction inconnue de la nouvelle équation différentielle est une fonction $t \mapsto v(t) = (y(t), z(t))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et l'équation s'écrit sous forme $v' = g(v)$ avec $g(y, z) = (z, y)$. L'équation peut aussi s'écrire matriciellement comme $v' = Av$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. ■

Remarque 17

Constatons que lorsque nous abaissons l'ordre d'une équation différentielle, nous augmentons la dimension de l'espace d'arrivée de F et passons nécessairement à la résolution d'un système d'équations différentielles d'ordre 1.