Chapitre 2

Équations différentielles du premier ordre

Sommaire

Dans ce chapitre, nous examinerons un certain nombre de types classiques d'équations différentielles du premier ordre. Nous nous concentrons ici sur les techniques de résolution explicites qui peut amener le calcul des solutions aux calculs des primitives. L'étude théorique telle que l'existence et l'unicité de solutions sera traité plus tard dans un autre chapitre.

Il n'existe pas de méthode générale de la résolution explicite d'une équation différentielle. La première démarche à faire pour résoudre une équation différentielle, est de déterminer l'ordre et le type d'équation auquel on a affaire et ensuite, si c'est l'un des types usuels, on applique la méthode standard, sinon on peut essayer des changements de fonctions ou changements de variables.

La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est

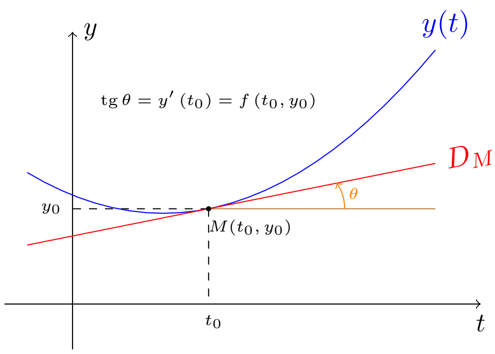
$$F(t, y, y') = 0.$$

Sa forme normale ou résolue s'écrit

$$y' = f(t, y).$$

Nous resterons dans le cas scalaire, parce qu'il est plus facile à manipuler et à comprendre. Le cas où F sera à valeurs dans $\mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}^*$ et ≥ 2 sera traité plus tard.

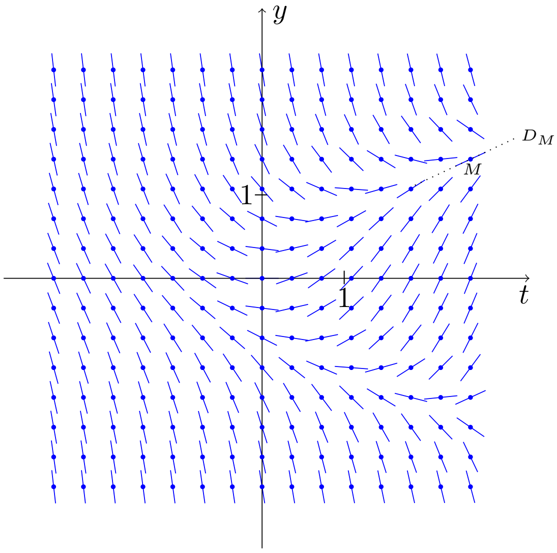
2.1 Interprétation géométrique



À tout point $M = (t_0, y_0)$, on associe la droite D_M passant par M et de coefficient directeur (pente) $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$.

$$D_M \ : \quad y - y_0 = f(t_0, y_0)(t - t_0).$$

2.1.1 Champ des tangentes



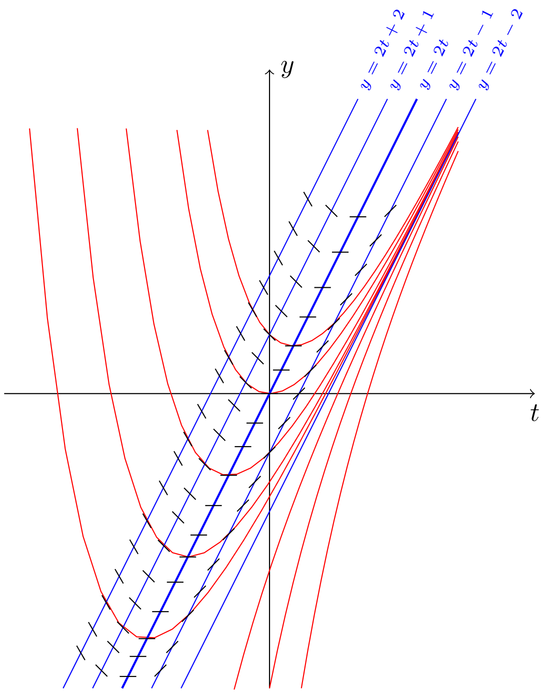
L'application $M \mapsto D_M$ est appelée *champ des tangentes* associé à l'équation $y' = f(t, y)$.
Une courbe intégrale de $y' = f(t, y)$ est une courbe différentiable C qui a pour tangente en chaque point $M \in C$ la droite D_M du champ des tangentes. L'exemple ci-contre correspond à l'équation

$$y' = f(t, y) = t - y^2.$$

2.1.2 Lignes isoclines

On appelle ligne *isocline* de $y' = f(t, y)$ l'ensemble Γ_k des points M où la droite D_M a une pente donnée k. La famille d'isoclines est définie par l'équation $\Gamma_k : f(t, y) = k$.

Exemple 16



Les lignes isoclines de l'équation différentielle $y' = f(t, y) = 2t - y$ sont obtenues en posant $y' = k$, k constante, alors il vient $2t - y = k$ ou $y = 2t - k$. Les isoclines sont des droites parallèles. Pour $k = 0$ on obtient l'isocline $y = 2t$. Cette droite sépare le plan tOy en deux parties dans lesquelles la dérivée y' a le même signe. En coupant la droite $y = 2t$, les courbes intégrales passent de la région de décroissance de la fonction y dans la région de croissance et inversement, ce qui signifie que sur cette droite sont situés des points extrémaux des courbes intégrales. ∎

2.2 Équations incomplètes

On distingue deux types possibles : incomplète en y et incomplète en t.

2.2.1 Incomplète en y ou absence de y ; équation du type $F(t, y') = 0$

Trois cas usuels :

i) Équation résoluble sous la forme $y' = f(t)$, il suffit d'intégrer on obtient

$$y = \int f(t)\, dt = g(t) + C,$$

où C est la constante d'intégration, les courbes intégrales se déduisent de l'une d'elles par des translations parallèles à l'axe des y.

ii) Équation résoluble sous la forme $t = f(y')$, on pose $y' = s$ d'où $t = f(s)$, $dt = f'(s)ds$, $dy = sdt$ donne $dy = sf'(s)ds$, et une intégration par parties donne

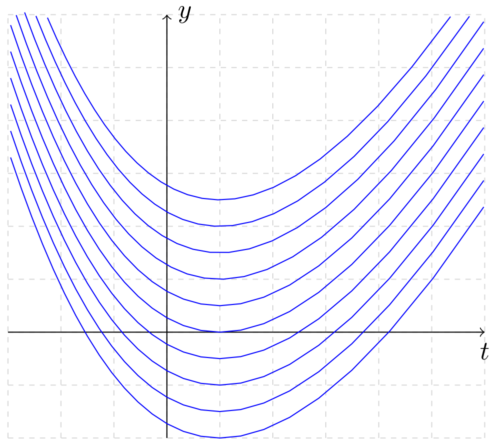
$$y = sf(s) - \int f(s)ds = g(s) + C.$$

On trouve les courbes paramétrées $(t, y) = (f(s), g(s) + C)$.

iii) Équation susceptible d'un paramétrage $t = f(s)$, $y' = g(s)$, on tire $dy = g(s)f'(s)\, ds$ donc $y = \varphi(s) + C$, d'où encore des courbes paramétrées.

Exemple 17
Soit l'équation $y' + e^{y'} = t$.
On pose $y' = s$ ou $\frac{dy}{dt} = s$, d'où $t = s + e^s$ et $\frac{dt}{ds} = 1 + e^s$ donc $\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = s + se^s$. Par intégration par parties on trouve $y = \frac{1}{2}s^2 + (s-1)e^s + C$.
Les courbes intégrales sont données sous forme paramétriques par

$$(t, y) = \left(s + e^s, \tfrac{1}{2}s^2 + (s-1)e^s + C\right), C \in \mathbb{R}.$$



■

2.2.2 Incomplète en t ou absence de t ; équation du type $F(y, y') = 0$

Plusieurs cas sont possibles :

i) Si on a $y' = f(y)$ alors $dt = \dfrac{dy}{f(y)}$ et donc $t = g(y) + C$. Les courbes intégrales déduites de l'une d'entre elles par translations parallèles à l'axe des t.

ii) Si $y = f(y')$, on pose $y' = s$ d'où $y = f(s)$ et donc $sdt = dy = f'(s)ds$. Alors $dt = \dfrac{f'(s)}{s}ds$ et $t = \displaystyle\int \frac{f'(s)}{s}ds = \varphi(s) + C$.

***iii*)** Paramétrage de $F(y, y') = 0$ sous la forme $y = f(s)$ et $y' = g(s)$.

On a $dy = f'(s)\, ds = g(s)ds$ d'où la solution donne $t = \varphi(s) + C$ si $g(s) \neq 0$.

Exemple 18

Considérons l'équation $y' = \sin y$.

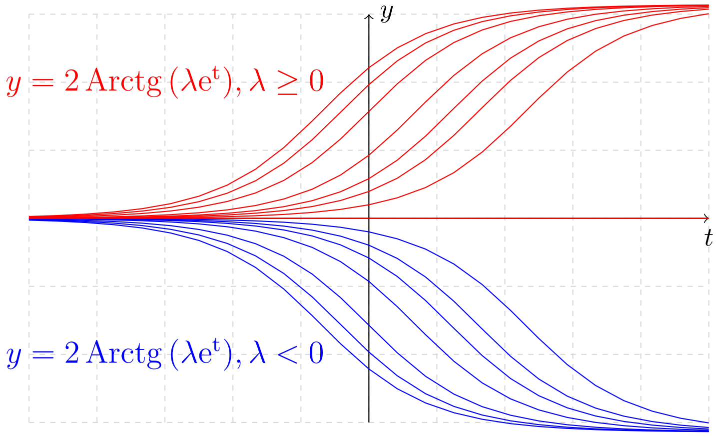
On a $dy = (\sin y)\, dt$ ou $dt = \frac{dy}{\sin y}$ alors $t = \displaystyle\int \frac{1}{\sin y} dy$.

Posons $s = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$, on obtient

$$t = \operatorname{Log} \left|\operatorname{tg} \frac{y}{2}\right| + C$$

ce qui donne

$$y = 2 \operatorname{Arctg}\left(\lambda e^{t}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



■

Exemple 19

Soit l'équation $y^2 + (y')^2 - 1 = 0$.

Posons $y = \sin s$, $y' = \cos s$ (sans oublier que $y' = \frac{dy}{dt}$).

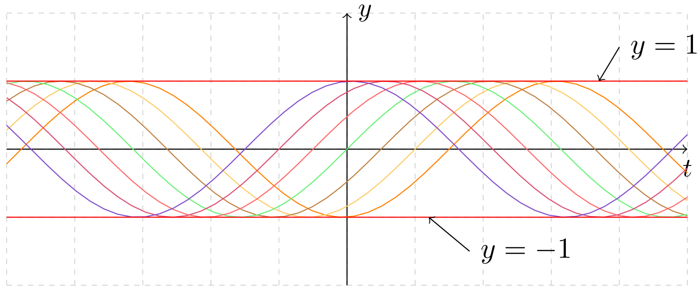
On a donc $dy = (\cos s)\, ds$ et $dy = y'dt = (\cos s)\, dt$, alors $(\cos s)\, ds = (\cos s)\, dt$.

Si $\cos s \neq 0$, $ds = dt$ ce qui donne $s = t + \lambda$ donc

$$y = \sin(t + \lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $\cos s = 0$, $s = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc

$$y = 1 \text{ ou } y = -1.$$



■

2.3 Équations à variables séparées

On appelle équation à variables séparées une équation différentielle du premier ordre $F(t, y, y') = 0$ qui peut se mettre sous la forme

$$f(y)y' = g(t).$$

Ou encore, avec $y' = \dfrac{dy}{dt}$ elle s'écrit

$$f(y)dy = g(t)dt,$$

En d'autres termes, les équations à variables séparées sont les équations dans lesquelles on peut regrouper t, dt d'une part et y, dy d'autre part. Elles s'intègrent en

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt, \text{ soit } F(y) = G(t) + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 20

L'équation $t^2y' = e^y$ donne

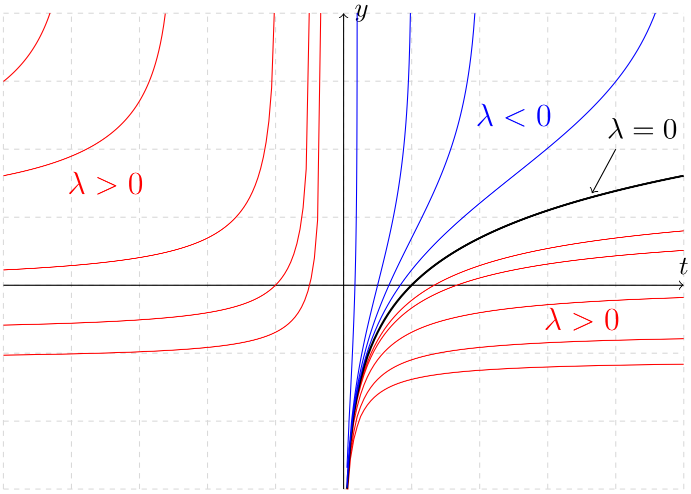
$$e^{-y}y' = \frac{1}{t^2} \text{ ou bien } e^{-y}dy = \frac{dt}{t^2},$$

ce qui donne par intégration

$$e^{-y} = \frac{1}{t} + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

On obtient finalement

$$y = \mathrm{Log}\left(\frac{t}{1+\lambda t}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

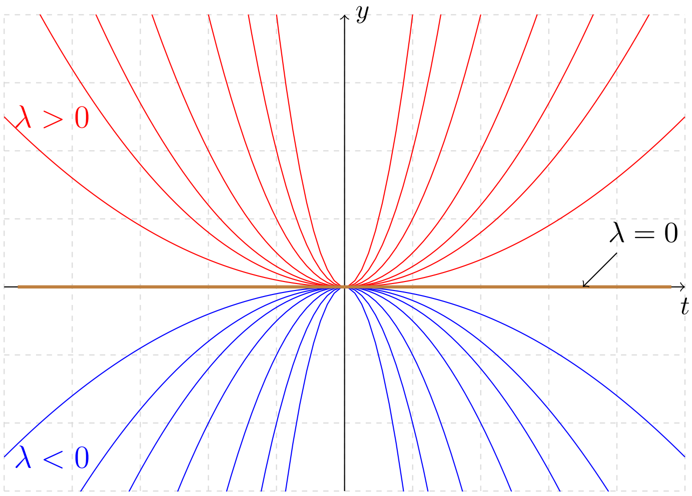
Exemple 21

L'équation $ty' = 2y$ l'on peut écrire $\frac{dy}{y} = 2\frac{dt}{t}$. On intègre alors $\int \frac{dy}{y} = \int 2\frac{dt}{t}$ ce qui donne $\mathrm{Log}\,|y| = 2\,\mathrm{Log}\,|t| + C$ ou beaucoup mieux

$$\mathrm{Log}\left|\frac{y}{\lambda}\right| = \mathrm{Log}\,|t|^2 \quad \text{où} \quad C = \mathrm{Log}\,|\lambda|\,.$$

Finalement, on trouve

$$y = \lambda t^2,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

Remarque 18

On remarque que les équations incomplètes $y' = f(t)$ et $y' = g(y)$ sont des cas particuliers des équations à variables séparées.

2.4 Équations différentielles type-homogènes

Définition 19 (Équations différentielles *type-homogènes*)

On appelle équation différentielle *type-homogène* toute équation différentielle de la forme

$$F\left(y', \frac{y}{t}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Elle se reconnaît au fait qu'elle est invariante par le changement de (t, y) en $(\lambda t, \lambda y)$, c'est-à-dire par une homothétie de centre O. Plusieurs cas se présentent suivant la forme pratique de (2.1).

a) Si on peut résoudre (2.1) sous la forme $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$, on pose $s = \frac{y}{t}$, $y = st$, $y' = \frac{dy}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} = f(s)$, c'est une équation à variables séparées. On peut aussi utiliser les coordonnées polaires, c'est-à-dire posons $t = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ et chercher $\rho(\theta)$.

b) Si on peut résoudre (2.1) sous la forme $y = tf(y')$, on pose $y' = u$, les variables se séparent et on arrive à un paramétrage des courbes intégrales.

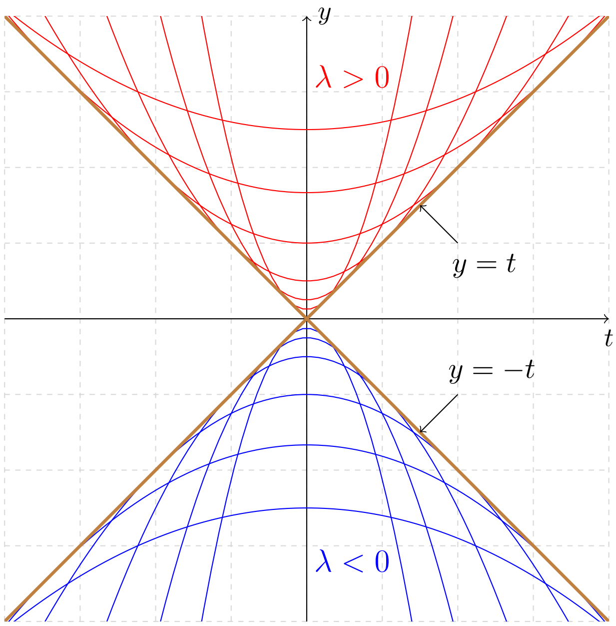
Exemple 22

Soit $t(y')^2 - 2yy' + t = 0$, ou bien $y = \frac{t}{2}\left(y' + \frac{1}{y'}\right)$. En posant $y' = u$ il vient $y = \frac{t}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$ et donc $dy = \frac{dt}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{t}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)du = udt$ d'où $(u^2 - 1)\,dt = t(u^2 - 1)\frac{du}{u}$.
Si $u^2 - 1 \neq 0$ alors $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$, soit à une homothétie près $u = \lambda t$, qui donne

$$y_\lambda = \frac{1}{2}\left(\lambda t^2 + \frac{1}{\lambda}\right), \ \lambda \neq 0.$$

Si $u^2 - 1 = 0$ alors $u = \pm 1$ qui donne

$$\bar{y}_1 = t, \ \text{ et } \ \bar{y}_2 = -t.$$



■

2.5 Équations aux différentielles totales, facteur intégrant

2.5.1 Équations aux différentielles totales

Une équation différentielle de la forme $P(t, y) + Q(t, y)\,y' = 0$ qui s'écrit encore

$$P(t, y)\,dt + Q(t, y)\,dy = 0, \tag{2.2}$$

s'appelle équations aux différentielle totales (ou une différentielle exacte) si

$$\omega(t, y) = P(t, y)\,dt + Q(t, y)\,dy$$

représente une différentielle totale (ou exacte) d'une certaine fonction $u(t, y)$, c'est-à-dire si

$$Pdt + Qdy = du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Théorème 20

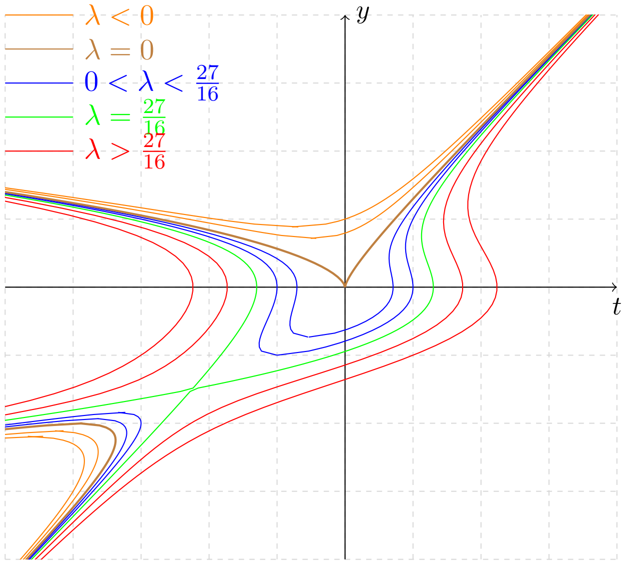
Pour que l'équation (2.2) soit une équations aux différentielle totales, il faut et il suffit que dans un certain domaine D de variations des variables t et y soit satisfaite la condition

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

La solution ou l'intégrale générale de (2.2) est de la forme $u\left(t, y\right) = C$.

Exemple 23

L'équation $\left(2ty - 3y^2\right) y' + y^2 + t = 0$ s'écrit aussi $\left(y^2 + t\right) dt + \left(2ty - 3y^2\right) dy = 0$.
On a $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 2y$, donc on a affaire à une différentielle totale. En écrivant $\frac{\partial u}{\partial t} = y^2 + t$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ty - 3y^2$, on trouve facilement que $u\left(t, y\right) = \frac{1}{2}t^2 + ty^2 - y^3 + c$. Notre équation originale est équivalente à $du\left(t, y\right) = 0$, donc $u\left(t, y\right) = \frac{1}{2}t^2 + ty^2 - y^3 + c = d$.
Finalement les courbes intégrales ont pour équation $t^2 + 2ty^2 - 2y^3 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.



■

2.5.2 Facteur intégrant

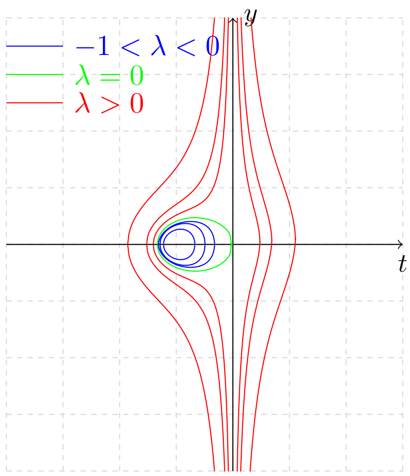
Dans certains cas où l'équation $P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0$ n'est pas aux différentielles totales, on arrive parfois à trouver une fonction $\mu\left(t, y\right)$ telle que $\mu\left(Pdt + Qdy\right)$ représente une différentielle totale d'une certaine fonction $u\left(t, y\right)$, c'est-à-dire $\mu Pdt + \mu Qdy = du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial y}dy$.
Une telle fonction μ s'appelle facteur intégrant. Elle vérifie $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$.

Exemple 24

L'équation différentielle

$$tyy' + y^2 + t^2 + t = 0 \quad \text{ou} \quad \left(y^2 + t^2 + t\right) dt + tydy = 0$$

se résout beaucoup plus rapidement avec le facteur intégrant $\mu\left(t, y\right) = t$. On a $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ et $\frac{\partial Q}{\partial t} = y$. Comme $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial t}$ donc le procédé dans le dernier exemple ne peut pas être appliqué. Considérons le facteur intégrant $\mu\left(t, y\right) = t$. En multipliant notre équation par t on obtient $\left(ty^2 + t^3 + t^2\right) dt + t^2ydy = 0$.



Cette fois on a bien $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 2ty$ donc on a affaire à une différentielle totale et en écrivant $\frac{\partial u}{\partial t} = ty^2 + t^3 + t^2$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = t^2 y$, on trouve $u(t,y) = \frac{1}{2}t^2y^2 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + c$ donc les courbes intégrales ont pour équation $3t^4 + 4t^3 + 6t^2y^2 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. ∎

2.6 Équations différentielles linéaires

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle est de la forme

$$a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t)\,, \tag{2.3}$$

où a, b et c sont des fonctions données de t, continues dans le domaine où il s'agit d'intégrer l'équation (2.3). La fonction c est appelée second membre de l'équation différentielle, a et b sont appelées les coefficients.

Si $c(t) \equiv 0$ on dit que l'équation (2.3) est linéaire homogène ou sans second membre

$$a(t)\,y' + b(t)\,y = 0. \tag{2.4}$$

La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = -\frac{b(t)}{a(t)}$ ou $\frac{dy}{y} = -\frac{b(t)}{a(t)}dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient

$$\operatorname{Log}|y(t)| = -\int g(t)\,dt + K, \text{ avec } g(t) = \frac{b(t)}{a(t)},\ K \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque valeur de K, cela donne deux solutions, l'une toujours positive $y = e^K\, e^{-\int g(t)dt}$, l'autre toujours négative $y = -e^K\, e^{-\int g(t)dt}$.

On retrouve toutes ces solutions, y compris la solution nulle, en disant que la solution générale de l'équation homogène $a(t)\,y' + b(t)\,y = 0$ est

$$y_h = C\, e^{-\int g(t)dt},\quad g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, C \in \mathbb{R}.$$

Si la valeur de la solution en $t = 0$ est donnée, on écrit souvent $y(t) = y(0)\, e^{-\int_0^t g(s)ds}$.

Remarque 21

La fonction $(t,y) \mapsto \mu(t,y) = e^{\int g(t)dt},\ g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$ est un facteur intégrant pour l'équation différentielle $y' + g(t)\,y = 0$.

Si nous supposons que $t \mapsto y_p(t)$ est une solution particulière de (2.3), on pose $y = y_p + u$ dans (2.3). Il vient

$$a(t)\, y_p' + b(t)\, y_p + a(t)\, u' + b(t)\, u = c(t)\,.$$

Or $a(t)\, y_p' + b(t)\, y_p = c(t)$, donc $a(t)\, u' + b(t)\, u = 0$, soit u une solution de l'équation homogène (2.4). Ainsi la solution générale de l'équation (2.3) avec second membre est la somme d'une solution particulière de cette même équation (2.3), et de la solution générale de l'équation homogène associée (2.4).

$$y(t) = \underbrace{y_p(t)}_{\text{Solution particulière de (2.3)}} + \underbrace{y_h(t)}_{\text{Solution de l'équation homogène (2.4)}} = y_p(t) + C\, e^{-\int g(t)dt}, \quad g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}.$$

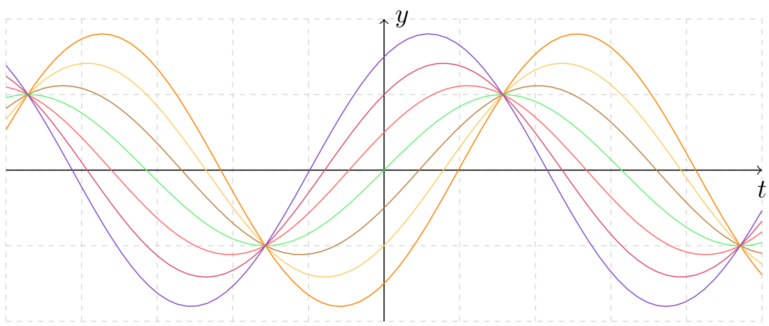
Exemple 25

L'équation $y' \cos t + y \sin t = 1$ admet comme solution particulière $y_p = \sin t$.

La solution de l'équation homogène associée $y' \cos t + y \sin t = 0$ est $y_h = \lambda \cos t, \lambda \in \mathbb{R}$.

Alors la solution générale de $y' \cos t + y \sin t = 1$ est

$$y = \sin t + \lambda \cos t,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

2.6.1 Méthode de la variation de la constante

Si aucune solution évidente de $a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)$ n'apparaît, on peut utiliser la méthode dite de *variation de la constante*, c'est-à-dire que l'on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t)\ e^{-\int g(t)dt}$, $g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$, où $t \mapsto C(t)$ est une nouvelle fonction inconnue de t. Il vient

$$a(t)\left(C'(t)\ e^{-\int g(t)dt} - C(t)\,\frac{b(t)}{a(t)}\, e^{-\int g(t)dt}\right) + b(t)\, C(t)\ e^{-\int g(t)dt} = c(t)\,,$$

et donc

$$C'(t) = \frac{c(t)}{a(t)} e^{\int g(t)dt}, \quad g(t) = \frac{b(t)}{a(t)},$$

ce qui permet, en intégrant de trouver $C(t)$.

Exemple 26

Soit l'équation $(t^2+1)\, y' + 3ty = t^2$.

L'équation sans second membre (homogène) associée est $(t^2+1)\, y' + 3ty = 0$. C'est une équation à variables séparables. Sa solution générale est $y = C \cdot (t^2+1)^{-\frac{3}{2}}$.

Cherchons la solution générale de l'équation non homogène sous la forme $y = C(t)\,(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}$, où $t \mapsto C(t)$ est une fonction inconnue de t. En portant dans l'équation non homogène, on trouve

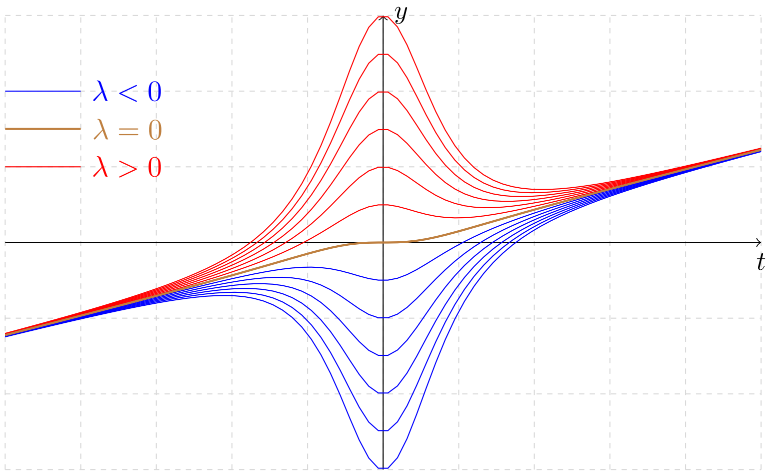
$$\left(t^2+1\right)\left(C'(t)\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} + C(t)(-3t)\left(t^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}\right) + 3tC(t)\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} = t^2.$$

Après simplification on obtient

$$C'(t) = t^2\sqrt{t^2+1}.$$

Si on pose $t = \operatorname{Sh} t$, on trouve

$$C(t) = \frac{t}{8}\left(2t^2+1\right)\sqrt{t^2+1} - \frac{1}{8}\operatorname{Argsh} t + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$



La solution générale est donc

$$y = \lambda\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{t}{8}\frac{2t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{8}\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\operatorname{Argsh} t, \lambda \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

2.6.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant est une équation de la forme

$$y'(t) + ay(t) = b(t), \tag{2.5}$$

c'est le coefficient de y qui est constant.

Dans ce cas la solution générale de l'équation homogène associée $y'(t) + ay(t) = 0$ est

$$y_h = C\,e^{-at},\ C \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière peut être déduite à partir de la méthode de variation de la constante exposée précédemment

$$y_p = e^{-at}\int e^{at}b(t)\,dt.$$

Alors la solution générale de l'équation non homogène (2.5) est

$$y = y_h + y_p = C\,e^{-at} + e^{-at}\int e^{at}b(t)\,dt,\ C \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres $b(t)$ spécifiques

La méthode de variation des constantes marche toujours ; cependant, dans bien des cas, il existe une solution particulière y_p qui "ressemble" à $b(t)$. Le type de la fonction $b(t)$ nous indique sous quelle forme la chercher, et il ne reste plus qu'à ajuster les coefficients. Cela conduit en général à des calculs plus simple que la méthode de variation de la constante. Les exemples ci-dessous montrent comment s'y prendre pour trouver une telle solution particulière.

- Si $b(t)$ est un polynôme de degré n :

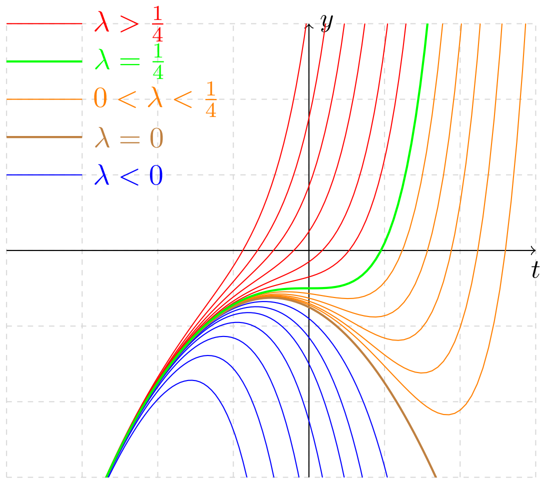
  Chercher une solution qui soit un polynôme de degré n.

Exemple 27

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - 2y = t^2 + 1.$$

Posons $y_p = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ et remplaçons dans l'équation : $2\alpha t + \beta - 2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = t^2 + 1$. En identifiant, on trouve alors $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = -\frac{3}{4}$. Une solution particulière est donc $y_p = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$. D'où la solution générale est $y = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + \lambda e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}$.



■

- Si $b(t)$ est de la forme ce^{rt}, avec r différent de $-a$:

  Chercher une solution de la forme αe^{rt}.

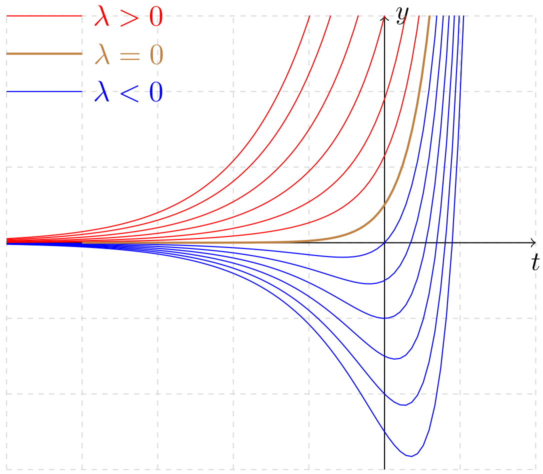
Exemple 28

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - y = e^{3t}.$$

Posons $y_p = \alpha e^{3t}$ et remplaçons dans l'équation : $3\alpha e^{3t} - \alpha e^{3t} = e^{3t}$, et donc $\alpha = \frac{1}{2}$. Une solution particulière est alors $y_p = \frac{1}{2}e^{3t}$. D'où la solution générale est

$$y = \frac{1}{2}e^{3t} + \lambda e^{t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

- Si $b(t)$ est de la forme ce^{-at} :

  Chercher une solution de la forme αte^{-at}.

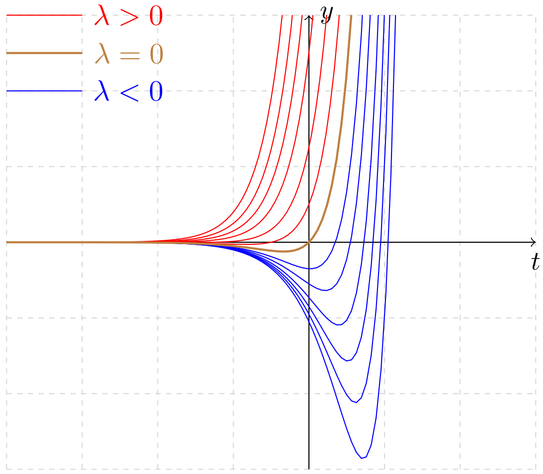
Exemple 29

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - 3y = e^{3t}.$$

Posons $y_p = \alpha t e^{3t}$ et remplaçons dans l'équation : $3\alpha t e^{3t} + \alpha e^{3t} - 3\alpha t e^{3t} = e^{3t}$, donc $\alpha = 1$. Une solution particulière est donc $y_p = te^{3t}$. D'où la solution générale

$$y = (t + \lambda)\, e^{3t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

- Si $b(t)$ est de la forme $p(t)\, e^{rt}$, où p est un polynôme de degré n :

  Chercher une solution de la forme $q(t)\, e^{rt}$, où q est un polynôme de degré n si $r \neq -a$, et de degré $n + 1$ si $r = -a$.

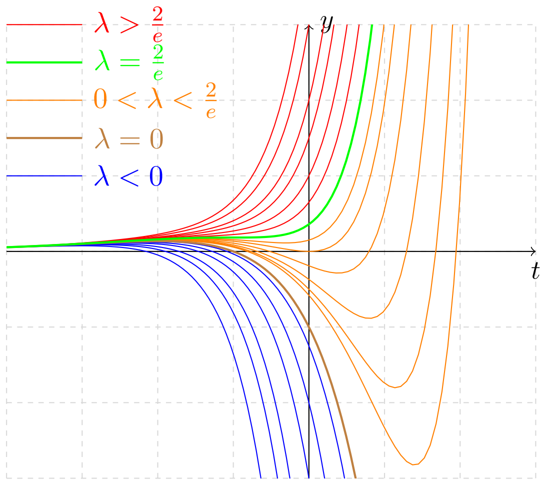
Exemple 30

Cherchons une solution de l'équation $y' - 2y = te^t$. Posons $y_p = (\alpha t + \beta)\, e^t$ et remplaçons dans l'équation

$$(\alpha t + \beta)\, e^t + \alpha e^t - 2(\alpha t + \beta)\, e^t = te^t.$$

En identifiant, on trouve $\alpha = \beta = -1$. Une solution particulière est donc $y_p = -(t + 1)\, e^t$. D'où la solution générale est

$$y = -(t + 1)\, e^t + \lambda e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$



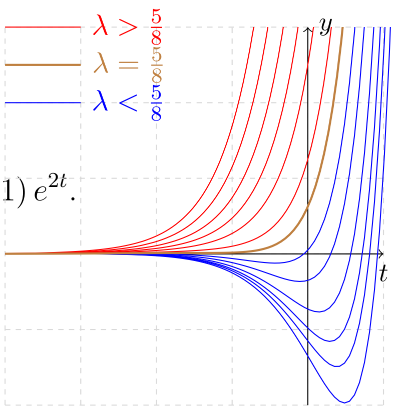
■

Exemple 31

Cherchons une solution de l'équation $y' - 2y = (t + 1)\, e^{2t}$. Posons $y_p = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)\, e^{2t}$ et remplaçons dans l'équation :

$$2\left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right) e^{2t} + (2\alpha t + \beta)\, e^{2t} - 2\left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right) e^{2t} = (t + 1)\, e^{2t}.$$

En identifiant, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ et γ est quelconque. Une solution particulière est donc $y_p = \left(\frac{1}{2}t^2 + t + \gamma\right) e^{2t}$. D'où la solution générale est $y = \left(\frac{1}{2}t^2 + t + \lambda\right) e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}$.



■

- Si $b(t)$ est de la forme $c\cos(rt) + d\sin(rt)$:

  Chercher une solution de la forme $\alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$.

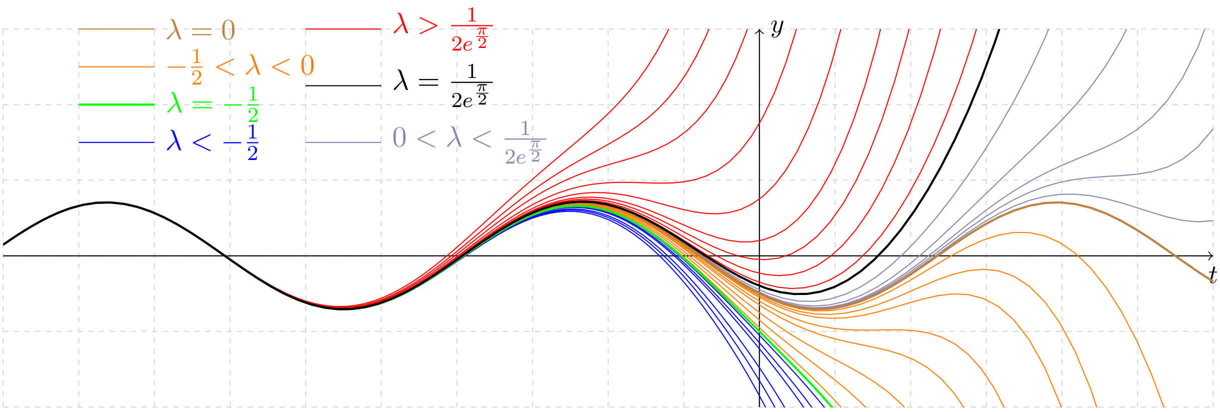
Exemple 32

Cherchons une solution de l'équation $y' - y = \sin t$.

Posons $y_p = \alpha\cos t + \beta\sin t$ et remplaçons dans l'équation :

$$-\alpha\sin t + \beta\cos t - (\alpha\cos t + \beta\sin t) = \sin t.$$

En identifiant, on trouve $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Une solution particulière est donc $y_p = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$. D'où la solution générale est $y = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}$.



∎

- Si $b(t)$ est la somme de plusieurs fonctions $b_1(t), \cdots, b_k(t)$ qui sont chacune d'un des types ci-dessus :

  Chercher pour i de 1 à k une solution particulière $s_i(t)$ de chacune des équations $y' + ay = b_i(t)$. La fonction $s_1(t) + \cdots + s_k(t)$ sera solution particulière de $y' + ay = b(t)$.

Exemple 33

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - y = 2t + \sin t.$$

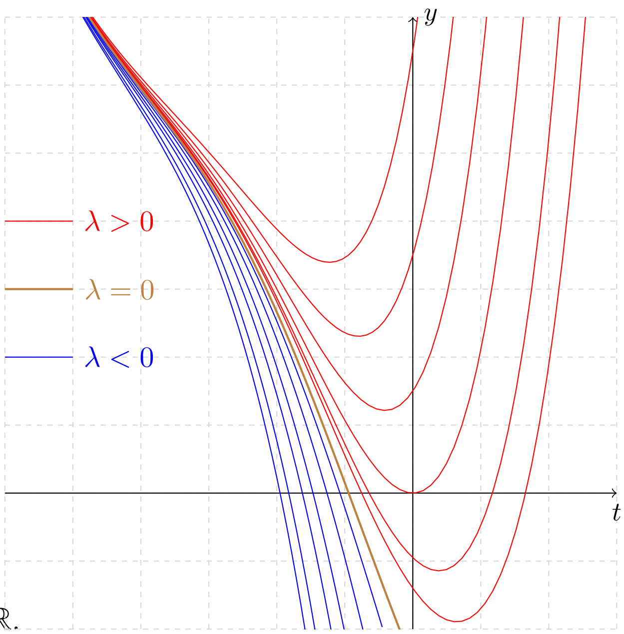
Une solution particulière de $y' - y = 2t$ est $y_{p_1} = -2t - 2$.

Une solution particulière de $y' - y = \sin t$ est $y_{p_2} = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.

Donc $y_p = -2(t+1) - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ est solution particulière de $y' - y = 2t + \sin t$.

Sa solution générale est donc

$y = -2(t+1) - \dfrac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}$.



∎

Résumons les cas ci-dessus dans le tableau suivant.

Second membre $b(t)$	**Solution particulière** $y_p(t)$
$b(t)$ est un polynôme de degré n	$y_p(t)$ est un polynôme de degré n
$b(t) = ce^{rt}$, avec $r \neq -a$	$y_p(t) = \alpha e^{rt}$
$b(t) = ce^{-at}$	$y_p(t) = \alpha te^{-at}$.
$b(t) = p(t)\,e^{rt}, r \neq -a$, p polynôme de degré n	$y_p(t) = q(t)\,e^{rt}$, q polynôme de degré n
$b(t) = p(t)\,e^{rt}, r = -a$, p polynôme de degré n	$y_p(t) = q(t)\,e^{rt}$, q polynôme de degré $n+1$
$b(t) = c\cos(rt) + d\sin(rt)$	$y_p(t) = \alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$

2.7 Autres types d'équations différentielles

2.7.1 Équation de Bernoulli

Une équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)\,y + b(t)\,y^m, \tag{2.6}$$

où m est différent de 0 et 1 et où a et b sont des applications définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. En général, m est un entier naturel, mais on peut prendre m réel à condition de chercher y à valeurs strictement positives. En général, a et b sont des fonctions continues.

Exemple 34

$ty' + y - y^2 \operatorname{Log} t = 0$ et $t^2y' + y = t\sqrt{y}$ sont des équations différentielles de Bernoulli. ▪

Méthode de résolution

Les cas particuliers $m = 0$ et $m = 1$ donnent des équations linéaires, qui ont déjà été traités ci-dessus.

Le principe de la méthode, si $m \neq 1$ et $m \neq 0$, est de diviser les deux membres de (2.6) par y^m. On obtient alors

$$\frac{y'}{y^m} - a(t)\frac{1}{y^{m-1}} = b(t).$$

On effectue un changement de fonction en posant $z = \frac{1}{y^{m-1}}$, il vient donc $\frac{1}{1-m}z' - a(t)z = b(t)$, alors z est la solution d'une équation linéaire du premier ordre. On la résout et on en déduit une expression de y.

Exemple 35

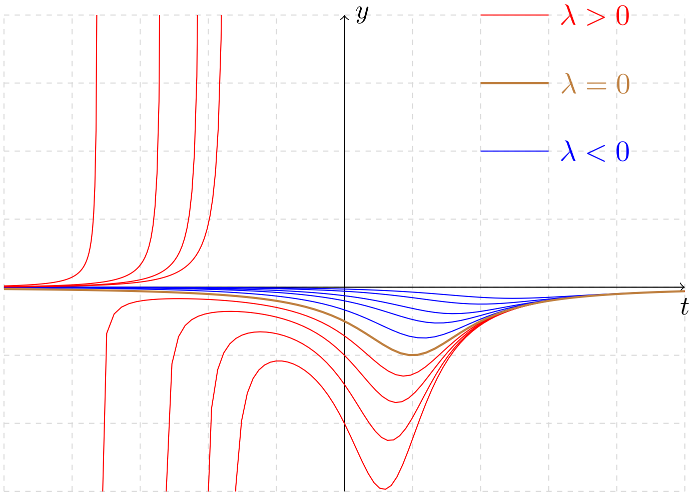
$(m = 2)$: $y' = y + t^2y^2$ on divise par y^3, et cela donne $\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = t^2$. En posant $z = \frac{1}{y}$ on obtient $z' + z = -t^2$ équation linéaire.

La solution de l'équation homogène associée est $z_h = \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}$. Avec la méthode de la variation de la constante on trouve

$$z(t) = \lambda e^{-t} - t^2 + 2t - 2,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$y(t) = \frac{1}{\lambda e^{-t} - t^2 + 2t - 2},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

2.7.2 Équation de Riccati

Une équation différentielle de Riccati est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \tag{2.7}$$

où a, b et c sont trois fonctions, souvent choisies continues sur un intervalle commun I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

L'intégration d'une équation différentielle de Riccati nécessite la connaissance d'une solution particulière de cette équation.

Méthode de résolution

On suppose comme solution particulière y_1 et on pose $y = z + y_1$. En remplaçant y par sa valeur dans (2.7) on trouve $z' = a(t)z^2 + (2a(t)y_1 + b(t))z$, a,b et c sont des fonctions continues sur l'ouvert I. Donc z est solution d'une équation de Bernoulli, qui a déjà été traité ci-dessus.

Exemple 36

L'équation différentielle

$$t\,(t-1)\,y' + y^2 - (2t+1)\,y = -2t,$$

est une équation de Riccati avec

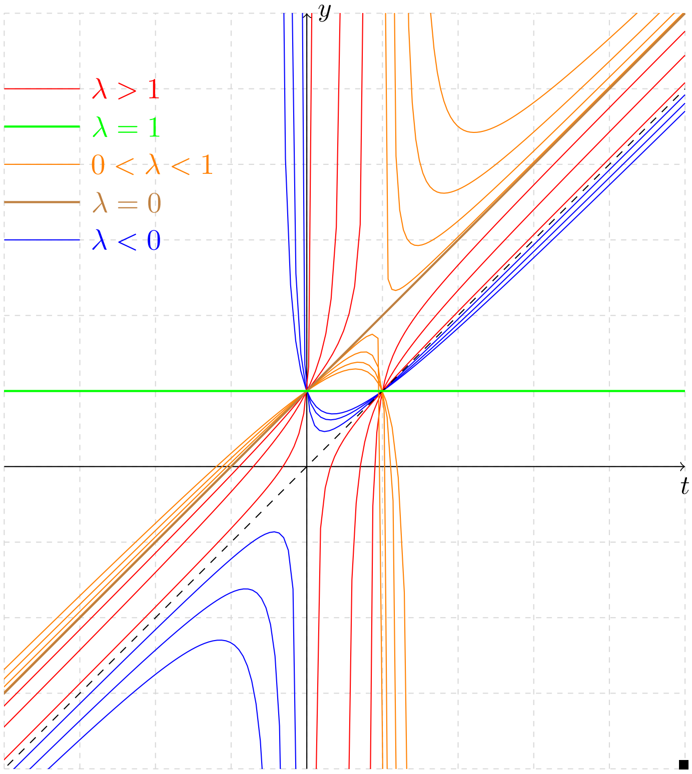
$$a(t) = \tfrac{-1}{t(t-1)}, b(t) = \tfrac{2t+1}{t(t-1)} \text{ et } c(t) = \tfrac{2}{1-t}.$$

Notons que $y_1 = t$ est solution particulière. En posant $y = t + z$ il vient $t\,(t-1)\,z' - z + z^2 = 0$. En divisant par $t\,(t-1)$ on obtient une équation de Bernoulli avec $m = 2$,

$$z' = \tfrac{1}{t(t-1)}z - \tfrac{1}{t(t-1)}z^2,$$

d'où $z\,(t) = \dfrac{t-1}{\lambda t - 1}$, donc

$$y\,(t) = t + \frac{t-1}{\lambda t - 1}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

2.7.3 Équations différentielles de Lagrange et Clairaut

Les équations de Lagrange sont les équations qui peuvent se mettre sous la forme

$$y = a\,(y')\cdot t + b\,(y')\,,$$

où a et b sont des fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

L'équation de Clairaut est un cas particulier de l'équation de Lagrange ($a\,(y') = y'$) :

$$y = ty' + b\,(y')\,.$$

Pour résoudre ce type d'équation on pose $y' = s$ ou $\dfrac{dy}{dt} = s$ et on cherche une expression pour $\dfrac{dy}{dt}$. On a $y = a\,(y')\cdot t + b\,(y') = a\,(s)\,t + b\,(s)$ donc $\frac{dy}{dt} = a\,(s) + t\frac{d}{dt}a\,(s) + \frac{d}{dt}b\,(s)$ d'où

$$\frac{dy}{dt} = a\,(s) + t\frac{d}{ds}a\,(s)\,\frac{ds}{dt} + \frac{d}{ds}b\,(s)\,\frac{ds}{dt} = a\,(s) + ta'\,(s)\,\frac{ds}{dt} + b'\,(s)\,\frac{ds}{dt}.$$

Comme $\dfrac{dy}{dt} = s$, alors

$$a\,(s) + ta'\,(s)\,\frac{ds}{dt} + b'\,(s)\,\frac{ds}{dt} = s$$

qui est une équation différentielle pour l'inconnue $t\,(s)$.

Une fois $t\,(s)$ obtenu, on trouve $y\,(s) = a\,(s)\,t\,(s) + b\,(s)$. On a donc un paramétrage des courbes intégrales.

Exemple 37

Soit l'équation $y = ty' + (y')^2 + 1$.

On pose $y' = s$ ou $\frac{dy}{dt} = s$, alors $y = ts + s^2 + 1$ et $\frac{dy}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} + 2s\frac{ds}{dt}$.

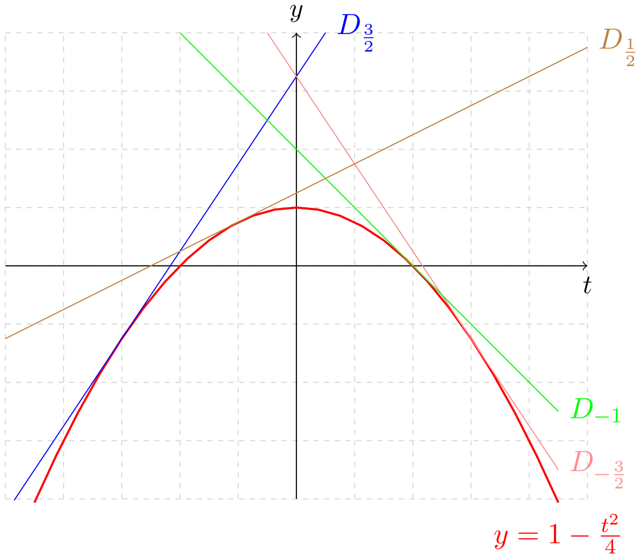
Comme $\frac{dy}{dt} = s$, alors $s + t\frac{ds}{dt} + 2s\frac{ds}{dt} = s$, d'où $(t + 2s)\,\frac{ds}{dt} = 0$.

On a donc soit $t + 2s = 0$ soit $\frac{ds}{dt} = 0$.

Si $t + 2s = 0$ alors $(t, y) = (-2s, -s^2 + 1)$, d'où $y = -\frac{t^2}{4}+1$ parabole (solution singulière en rouge).

Si $\frac{ds}{dt} = 0$, alors $s =$ constante$= \lambda$ et donc $y = \lambda t + \lambda^2 + 1$ famille de droites (D_λ).

On peut montrer que l'ensemble des droites (D_λ) est l'ensemble des tangentes à la parabole. La parabole est l'enveloppe des droites (D_λ).



■

2.8 Équations différentielles et familles de courbes

2.8.1 Équation différentielle associée à une famille de courbes

On considère l'équation $\phi\,(t, y, \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$, d'une famille de courbes Γ_λ. En dérivant cette équation par rapport à t, on obtient

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\,(t, y, \lambda) + y'\frac{\partial \phi}{\partial y}\,(t, y, \lambda) = 0.$$

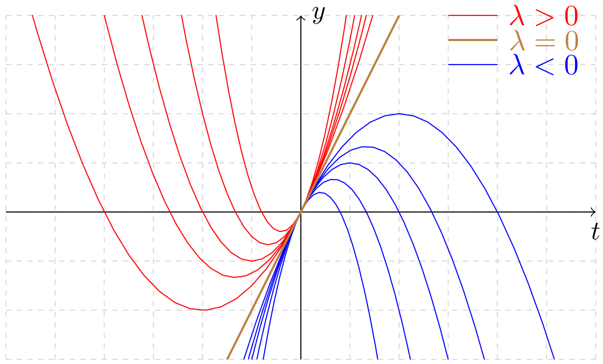
On essaie d'éliminer λ entre les deux équations précédentes pour obtenir une équation ne faisant plus intervenir que t, y, y' : $F\,(t, y, y') = 0$ qui est l'équation différentielle de la famille de courbes Γ_λ.

Exemple 38

Cherchons l'équation différentielle de la famille de paraboles $y = \lambda t^2 + 2t, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

On a $y' = 2\lambda t + 2$. En éliminant λ entre les deux équations $\lambda = \frac{y-2t}{t^2} = \frac{y'-2}{2t}$, on obtient

$$ty' = 2y - 2t.$$

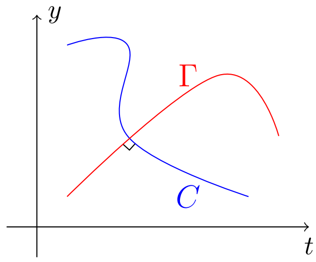


■

2.8.2 Trajectoires orthogonales à une famille de courbes

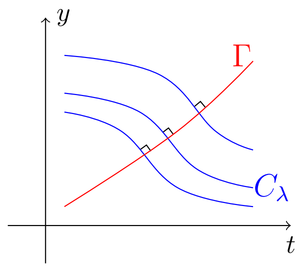
Définition 22 (Courbes orthogonales)

Deux courbes sont *orthogonales* si elles se coupent et que leurs tangentes aux points d'intersection sont perpendiculaires. Notons que le produit des pentes de ces tangentes vaut alors -1.



Définition 23 (Trajectoire orthogonale)

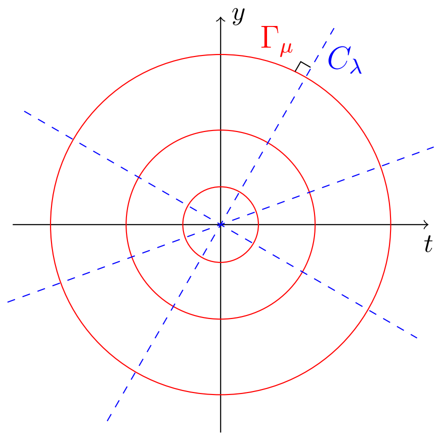
On appelle *trajectoire orthogonale* de la famille de courbes (C_λ) une courbe Γ telle qu'en chacun de ses points il passe une courbe C_λ orthogonale à Γ.



Notons que, si $F(t, y, y') = 0$ est l'équation différentielle de la famille (C_λ), alors celle des trajectoires orthogonales est de la forme $F\left(t, y, \frac{-1}{y'}\right) = 0$.

Exemple 39

Cherchons les trajectoires orthogonales des droites passant par l'origine.
Cherchons tout d'abord l'équation différentielle de la famille de droites $C_\lambda : y = \lambda t,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
On a $y' = \lambda$, donc $y = y't$. Alors l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est $y = \left(\frac{-1}{y'}\right) t$ ou bien $yy' = -t$, qui s'intègre en $t^2 + y^2 = K$.
On obtient des courbes lorsque $K = \mu^2$ c'est-à-dire $\Gamma_\mu : t^2 + y^2 = \mu^2,\ \mu \in \mathbb{R}_+^*$, qui sont des cercles centrés à l'origine.



■