



Examen final - 12 janvier 2017. Durée : 1 heure et 30 minutes

Nom et Prénom :.....

Matricule :.....

20

**Exercice 1 (6 pts.) :** Résoudre les équations différentielles suivantes :

**a)**  $ty' = y + t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ ,    **b)**  $y' = \left(2t - \frac{1}{t}\right)y - 1$ ,    **c)**  $yy'' - (y')^2 + 2y^2 = 0$  (poser  $u = \frac{y'}{y}$ ),  
**d)**  $y'' - 3y' + 2y = 2t + e^t$ .

Réponse.

**Exercice 2 (5 pts.)** : On se propose d'intégrer sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  l'équation différentielle de Riccati :

$$(E_1) : y' - \frac{1}{t}y - y^2 = -9t^2.$$

- a) Déterminer  $a \in ]0, +\infty[$  tel que  $y(t) = at$  soit une solution particulière  $y_0$  de  $(E_1)$ .
- b) Montrer que le changement de fonction inconnue  $y(t) = y_0(t) - \frac{1}{z(t)}$  transforme l'équation  $(E_1)$  en l'équation différentielle  $(E_2) : z'(t) + \left(6t + \frac{1}{t}\right) z(t) = 1$ .
- c) Résoudre l'équation différentielle  $(E_2)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- d) En déduire les solutions de  $(E_1)$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Réponse.**

**Exercice 3 (5 pts.)** : On considère l'équation différentielle  $(E_3) : ty'' - (t + 1)y' + y = 0$ .

- a) Déterminer une solution de l'équation  $(E_3)$  de la forme  $y(t) = e^{\alpha t}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- b) On pose alors  $y(t) = e^{\alpha t} z(t)$ . Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par  $z$  ?
- c) En déduire les solutions de  $(E_3)$  sur  $]0, +\infty[$ .
- d) Déterminer les solutions qui vérifient  $y(0) = 1$  et la tangente en  $t = 0$  coupe l'axe  $Ot$  au point d'abscisse  $t = -1$ .

**Réponse.**

**Exercice 4 (4 pts.) :** On se propose d'étudier les solutions  $y$  définies pour  $t > 0$  de l'équation différentielle :

$$(E_4) : t^2 y'' + aty' + by = 0, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

- a) On pose  $t = e^s$  et  $u(s) = y(t)$ . Quelle est l'équation différentielle satisfaite par  $u$ .
- b) Résoudre l'équation différentielle satisfaite par  $u$  si  $a = b = 1$ .
- c) Dédurre les solutions de l'équation différentielle  $(E_4)$  si  $a = b = 1$ .

**Réponse.**