USTHB 2016-2017 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
3ème année LAC

Examen final - 12 janvier 2017. Durée : 1 heure et 30 minutes

Nom et Prénom :...

Matricule :...

/20

Exercice 1 (6 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $ty' = y + t^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, **b)** $y' = \left(2t - \frac{1}{t}\right) y - 1$, **c)** $yy'' - (y')^2 + 2y^2 = 0$ (poser $u = \frac{y'}{y}$),
d) $y'' - 3y' + 2y = 2t + e^t$.

Réponse.

a) L'équation différentielle $ty' = y + t^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, est linéaire d'ordre 1, à coefficients non constants, avec second membre.

L'équation homogène associée est $ty' - y = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = \frac{1}{t}$ ou $\frac{dy}{y} = \frac{1}{t}dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\operatorname{Log}|y(t)| = \operatorname{Log}|t| + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = Ct, \quad C \in \mathbb{R}$.

On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t)\, t$. Il vient $t\left(C'(t)\, t + C(t)\right) = C(t)\, t + t^{\alpha}$, et donc $C'(t) = t^{\alpha-2}$, ce qui permet, en intégrant de trouver $C(t) = \frac{1}{\alpha-1}t^{\alpha-1}$ si $\alpha \neq 1$ et $C(t) = \operatorname{Log}|t|$ si $\alpha = 1$.

La solution générale de l'équation $ty' = y + t^{\alpha}$ est donc

$$y = \tfrac{1}{\alpha-1}t^{\alpha} + \lambda t \text{ si } \alpha \neq 1 \quad \text{et} \quad y = t\operatorname{Log}|t| + \lambda t \text{ si } \alpha = 1 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation homogène associée est $y' - \left(2t - \frac{1}{t}\right) y = 0$. Sa solution générale est

$$y = C \cdot \frac{e^{t^2}}{t}.$$

Cherchons la solution générale de l'équation non homogène sous la forme

$$y = C(t) \cdot \frac{e^{t^2}}{t}.$$

En portant dans l'équation non homogène, on trouve

$$C'(t) \cdot \frac{e^{t^2}}{t} + \left(2t - \frac{1}{t}\right) C(t) \cdot \frac{e^{t^2}}{t} - \left(2t - \frac{1}{t}\right) C(t) \cdot \frac{e^{t^2}}{t} = -1.$$

Après simplification on obtient $C'(t) = -te^{-t^2}$, ce qui donne $C(t) = \frac{1}{2}e^{-t^2}$.

La solution générale de l'équation non homogène est donc

$$y = \frac{1}{2t} + \lambda\frac{e^{t^2}}{t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) On peut écrire l'équation $yy'' - (y')^2 + 2y^2 = 0$ sous la forme $\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + 2 = 0$.

On effectue un changement de fonction inconnue en posant $u = \dfrac{y'}{y}$. D'où $\dfrac{y''}{y} = u' + u^2$ et donc l'équation $\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + 2 = 0$ devient $u' + 2 = 0$. D'où $u = -2t + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ et donc $\dfrac{y'}{y} = -2t + \lambda$ qui est une équation différentielle du premier ordre ayant pour solution générale

$$y = \mu e^{-t^2 + \lambda t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

d) L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, on a $r_1 = 1, r_2 = 2$. Alors la solution générale de l'équation homogène est $y = \lambda e^t + \mu e^{2t},\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme 1 est racine simple du polynôme caractéristique $r^2 - 3r + 2$, cherchons une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme $y_p(t) = at + b + cte^t$. On a $y_p' = a + c(t+1)e^t, y_p'' = c(t+2)e^t$. En remplaçant dans l'équation, on trouve $2b - 3a + 2at - ce^t = 2t + e^t$. D'où $a = 1, b = \frac{3}{2}$ et $c = -1$. La solution générale de l'équation non homogène est donc

$$y = t + \frac{3}{2} + (\lambda - t)e^t + \mu e^{2t},\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 (5 pts.) : On se propose d'intégrer sur l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation différentielle de Riccati :

$$(E_1) : y' - \tfrac{1}{t}y - y^2 = -9t^2.$$

a) Déterminer $a \in]0,+\infty[$ tel que $y(t) = at$ soit une solution particulière y_0 de (E_1).

b) Montrer que le changement de fonction inconnue $y(t) = y_0(t) - \dfrac{1}{z(t)}$ transforme l'équation (E_1) en l'équation différentielle $(E_2) : z'(t) + \left(6t + \tfrac{1}{t}\right) z(t) = 1$.

c) Résoudre l'équation différentielle (E_2) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

d) En déduire les solutions de (E_1) sur $]0,+\infty[$.

Réponse.

a) Trouvons $a \in]0,+\infty[$ tel que $y_0(t) = at$ soit une solution particulière. Puisque

$$y_0'(t) - \frac{1}{t}y_0(t) - (y_0(t))^2 = -a^2t^2,$$

alors y_0 est solution si et seulement si $a = \pm 3$. Comme $a \in]0,+\infty[$, donc on prend $a = 3$.

b) Si z est une fonction $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas, on pose $y(t) = 3t - \dfrac{1}{z(t)}$. Alors y est solution si et seulement si

$$3 + \frac{z'(t)}{(z(t))^2} - \frac{1}{t}\left(3t - \frac{1}{z(t)}\right) - \left(3t - \frac{1}{z(t)}\right)^2 = -9t^2.$$

Ce qui donne

$$\frac{z'(t)}{(z(t))^2} + \frac{1}{tz(t)} - \frac{1}{(z(t))^2} + \frac{6t}{z(t)} = 0.$$

En multipliant par $(z(t))^2$, on obtient que y est solution de (E_1) si et seulement si z vérifie

$$(E_2) : z'(t) + \left(6t + \frac{1}{t}\right) z(t) = 1.$$

c) L'équation homogène associée à (E_2) est $z' + \left(6t + \dfrac{1}{t}\right) z = 0$. Sa solution générale est $z = C \cdot \dfrac{e^{-3t^2}}{t}$.

Cherchons la solution générale de l'équation (E_2) sous la forme $z = C(t) \cdot \dfrac{e^{-3t^2}}{t}$.

En portant dans l'équation (E_2), on trouve

$$C'(t) \cdot \frac{e^{-3t^2}}{t} + \left(-6t - \frac{1}{t}\right) C(t) \cdot \frac{e^{-3t^2}}{t} + \left(6t + \frac{1}{t}\right) C(t) \cdot \frac{e^{-3t^2}}{t} = 1.$$

Après simplification on obtient $C'(t) = te^{3t^2}$, ce qui donne $C(t) = \frac{1}{6}e^{3t^2}$.

La solution générale de l'équation (E_2) est donc

$$z = \frac{1}{6t} + \lambda\frac{e^{-3t^2}}{t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) On va maintenant en déduire les solutions de (E_1) définies sur $]0,+\infty[$.

Soit y une solution $\mathcal{C}^1$ définie sur $]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a nécessairement $y(t) = 3t - \dfrac{1}{z(t)} = 3t - \dfrac{6t}{1 + 6\lambda e^{-3t^2}}$ et donc pour tout $t > 0$ on a $1 + 6\lambda e^{-3t^2} \neq 0$ ce qui équivaut à $-3t^2 \neq \operatorname{Log}\left(-\frac{1}{6\lambda}\right) = -\operatorname{Log}(-6\lambda)$ pour tout $t > 0$. Ceci possible si $\operatorname{Log}(-6\lambda) < 0$ ou bien $\lambda > \frac{-1}{6}$.

Donc si y est solution de (E_1), alors

$$y(t) = 3t \quad \text{ou} \quad y(t) = 3t - \frac{6t}{1 + 6\lambda e^{-3t^2}} \text{ avec } \lambda > \frac{-1}{6}.$$

Exercice 3 (5 pts.) : On considère l'équation différentielle $(E_3) : ty'' - (t+1)\,y' + y = 0$.

a) Déterminer une solution de l'équation (E_3) de la forme $y(t) = e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) On pose alors $y(t) = e^{\alpha t} z(t)$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ?

c) En déduire les solutions de (E_3) sur $]0, +\infty[$.

d) Déterminer les solutions qui vérifient $y(0) = 1$ et la tangente en $t = 0$ coupe l'axe Ot au point d'abscisse $t = -1$.

Réponse.

a) En remplaçant dans l'équation différentielle (E_3), on obtient

$$\left(\alpha^2 t - \alpha\,(t+1) + 1\right) e^{\alpha t} = \left(\left(\alpha^2 - \alpha\right) t + 1 - \alpha\right) e^{\alpha t} = 0.$$

Si $\alpha = 1$, on a alors $t \mapsto y_0(t) = e^t$ est une solution de (E_3).

b) On a alors $y(t) = e^t z(t), y'(t) = e^t\,(z'(t) + z(t))$ et $y''(t) = e^t\,(z''(t) + 2z'(t) + z(t))$.

En remplaçant dans l'équation différentielle (E_3), on obtient

$$te^t\,(z''(t) + 2z'(t) + z(t)) - (t+1)\,e^t\,(z'(t) + z(t)) + e^t z(t) = (tz''(t) + (t-1)\,z'(t))\,e^t = 0.$$

Puisqu'une exponentielle n'est jamais nulle, on en déduit l'équation différentielle vérifiée par z :

$$tz'' + (t-1)\,z' = 0.$$

c) En posant $u = z'$, l'équation différentielle vérifiée par z sur $]0, +\infty[$ est équivalente à

$$u' + \left(1 - \frac{1}{t}\right) u = 0,$$

qui est une équation différentielle du premier ordre. Ses solutions sont $u(t) = \lambda te^{-t},\ \lambda \in \mathbb{R}$. D'où $z'(t) = \lambda te^{-t},\ \lambda \in \mathbb{R}$. Pour avoir $z(t)$, il suffit d'intégrer la fonction $t \mapsto \lambda te^{-t}$.

On intègre par parties

$$z(t) = \int \lambda te^{-t}dt = \int -\lambda t d\left(e^{-t}\right) = -\lambda te^{-t} + \int \lambda e^{-t}dt = -\lambda\,(t+1)\,e^{-t} + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Alors les solutions de l'équation différentielle initiale (E_3) sont

$$y(t) = e^t z(t) = -\lambda\,(t+1) + \mu e^t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

d) La première condition $y(0) = 1$ donne $-\lambda + \mu = 1$.

L'équation de la tangente est $Y - y(0) = y'(0)\,(T - 0)$ ou $Y = y'(0)\,T + 1$.

Elle doit couper l'axe Ot en $T = -1$, donc pour $Y = 0$, on doit avoir $T = -1$, ce qui donne $y'(0) = 1$.

Ainsi $-\lambda + \mu = 1$. Les solutions sont

$$y(t) = -\lambda\,(t+1) + (\lambda + 1)\,e^t, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 (4 pts.) : On se propose d'étudier les solutions y définies pour $t > 0$ de l'équation différentielle :

$$(E_4) : t^2 y'' + a t y' + b y = 0, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

a) On pose $t = e^s$ et $u(s) = y(t)$. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par u.

b) Résoudre l'équation différentielle satisfaite par u si $a = b = 1$.

c) Déduire les solutions de l'équation différentielle (E_4) si $a = b = 1$.

Réponse.

a) On a

$$y'(t) = \frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} u(s) = \frac{d}{ds} u(s) \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} u'(s) \text{ car } \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Log} t = \frac{1}{t},$$

ainsi

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{d}{dt} y'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t} u'(s)\right) = \frac{-1}{t^2} u'(s) + \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dt}\left(u'(s)\right) \\ &= \frac{-1}{t^2} u'(s) + \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{ds}\left(u'(s)\right) \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{-1}{t^2} u'(s) + \frac{1}{t^2} u''(s). \end{aligned}$$

D'où pour tout $t > 0$ on a

$$\begin{aligned} t^2 y''(t) + a t y'(t) + b y(t) &= t^2\left(\frac{-1}{t^2} u'(s) + \frac{1}{t^2} u''(s)\right) + a t\left(\frac{1}{t} u'(s)\right) + b u(s) \\ &= u''(s) + (a-1) u'(s) + b u(s) = 0. \end{aligned}$$

Donc l'équation différentielle satisfaite par u est

$$u'' + (a-1) u' + b u = 0.$$

b) Si $a = b = 1$, l'équation différentielle satisfaite par u est

$$u'' + u = 0,$$

qui est une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants et homogène. Son équation caractéristique est $r^2 1 = 0$, on a donc $r_1 = -i, r_2 = i$. Alors sa solution générale est $u(s) = \lambda \cos s + \mu \sin s, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

c) On va maintenant en déduire les solutions de (E_4) définies sur $]0, +\infty[$ si $a = b = 1$.

On a $y(t) = u(s) = \lambda \cos s + \mu \sin s$. Comme $s = \operatorname{Log} t$ alors

$$y(t) = \lambda \cos(\operatorname{Log} t) + \mu \sin(\operatorname{Log} t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$