

Série d'exercices n° 2 : Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1 : (*Variables séparées*)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a) $y' = y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R},$ b) $y' = (1 - y) y,$ c) $y' = \operatorname{tg}(t) y, y(0) = 1,$
d) $y' = \frac{\pi}{4} \cos(t) (1 + y^2),$ e) $y' = t\sqrt{1 - y^2},$ f) $t^3 y' \sin y = 2, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{\pi}{2},$
g) $y' \sqrt{1 - t^2} + ty = 0,$ h) $(1 - y^2) y' = y,$ I) $ty' + y \operatorname{Log} y = 0, y(1) = 1.$

Exercice 2 : (*Équations type-homogènes*)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a) $4yy' + t = 0,$ b) $(t - y) y' + 2t + 3y = 0,$ c) $t^2 y' = y^2,$
d) $ty' = y - t,$ e) $ty' = y + \sqrt{y^2 - t^2},$ f) $ty' = y + t \cos^2 \frac{y}{t}.$

Exercice 3 : (*Équations aux différentielles totales, facteur intégrant*)

Intégrer les équations différentielles suivantes :

- a) $(t^2 y + y^3) y' + t^3 + ty^2 = 0,$ b) $y(t^2 + 2y^2) y' + t(2t^2 + y^2) = 0,$
c) $2tyy' = t + y^2, \mu(t, y) = \varphi(t)$ d) $(t + 4ty + 5y^2) y' + 3t + 2y + y^2, \mu(t, y) = \varphi(t + y^2).$

Exercice 4 : (*Équations différentielles linéaires*)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a) $y' + y = \cos t,$ b) $y' + 2ty = 4t,$ c) $y' - y = e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{R},$
d) $y' - 2ty = 2te^{t^2},$ e) $(t - 2) y' = y + 2(t - 2)^2,$ f) $(1 + t^2) y' = 2ty + 5(1 + t^2),$
g) $y' + y = e^{-t}, y(0) = 0,$ h) $2ty' + y = 1, y(1) = 2,$ I) $y' \cos t - y \sin t = 2t, y(0) = 0.$

Exercice 5 : (*Équations de Bernoulli, Ricatti et Lagrange*)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a) $y' = y - \sqrt{y},$ c) $y' = y^2 + ty + 1,$ e) $y = ty' - (y')^3,$
b) $(t^3 + 1) y' = 3t^2 y - ty^3,$ d) $(t^3 - 1) y' = y^2 + t^2 y - 2t,$ f) $y = t(1 + y') - (y')^2.$

Exercice 6 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\text{a) } y' - \left(2t - \frac{1}{t}\right) y = 1, \quad \text{c) } y' - y = t^k e^t, k \in \mathbb{N}, \quad \text{c) } t(1 + \text{Log}^2 t) y' + 2(\text{Log } t) y = 1,$$

$$\text{d) } ty' + y - ty^3 = 0, \quad \text{e) } t^2(y^2 + y') = ty - 1, \quad \text{f) } t^2 y' = t^2 y^2 + ty + 1,$$

$$\text{g) } y = \frac{3}{2}ty' + e^{y'}, \quad \text{h) } y = (y' - 1)e^{y'}, \quad \text{i) } ty' = t^2 + y,$$

$$\text{j) } (t^3 + e^y) y' = 3t^2, \quad \text{k) } ty' = y - t, \quad \text{l) } y' \sin t = y \text{Log } y.$$

Exercice 7 :

Déterminer, sans résoudre l'équation, le lieu des extrema des solutions de $y' = ty - 1$.

Dans quelle région du plan sont-elles croissantes, décroissantes ?

Exercice 8 :

On considère la famille de courbes (C_λ) d'équation générale $t^2 + 3y^2 - 3 = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- a) Préciser la nature des courbes (C_λ) .
- b) Déterminer l'équation différentielle pour cette famille.
- c) En déduire l'équation différentielle de la famille de courbes orthogonales puis l'équation générale de ces courbes.

Exercice 9 :

Montrer que la substitution $y = \frac{s}{t}$ réduit l'équation différentielle $(1 - ty)y' = t(1 + ty)y'$ à une équation à variables séparables. Résoudre cette équation.

Exercice 10 : (*Dynamique des populations*)

On s'intéresse à l'évolution d'une population. Soient $y(t)$ le nombre d'individus de cette population et $k(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$ le taux de croissance de cette population au temps t . Étudier l'évolution de cette population au cours du temps dans les cas suivants :

- a) k est constant.
- b) $k = y$. Montrer alors que la solution explose en temps fini.
- c) $k = a - by$. Montrer que y converge.