USTHB 2018-2019 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
3$^{\text{ème}}$ année LAC

Examen final - 16 janvier 2019. Durée : 1 heure et 30 minutes

Nom et Prénom :..

Matricule :..

/ **20**

Exercice 1 (4 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = \alpha t y + t, \alpha \in \mathbb{R}$, **b)** $t\,(y+3)\,y' = y$,

Réponse.

Suite de l'exercice 1 (4 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes :

c) $ty' = y + \sqrt{t^2 - y^2}$ sur $]0, +\infty[$ (poser $s = \dfrac{y}{t}$), **d)** $y'' + y = e^t + e^{-t}$.

Réponse.

Exercice 2 (4 pts.) : On considère l'équation différentielle : $(E_1) : y'' + y = e^t + e^{-t}$.

On veut déterminer les fonctions $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que : $(E_2) : u'(t) + u(-t) = e^t$.

a) Montrer que tout solution de (E_2) est solution de (E_1).

b) En déduire toutes les fonctions u vérifiant (E_2).

Noter que la solution générale de (E_2) dépend d'un seul paramètre.

Réponse.

Exercice 3 (4 pts.) : On considère l'équation différentielle $(E_3) : t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

a) Déterminer une solution de l'équation (E_3) de la forme $y(t) = t^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) On pose alors $y(t) = t^\alpha z(t)$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ?

c) En déduire les solutions de (E_3) sur $]0, +\infty[$.

Réponse.

Exercice 4 (4 pts.) :

a) Étudier la lipschitzienité au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y) = 3\sqrt{|y|}$.

b) Soit $a \geq 0$. Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \begin{cases} \frac{9}{4}(t-a)^2 & \text{si } t > a \\ 0 & \text{si } t \leq a \end{cases}$

est solution du problème de Cauchy $y'(t) = 3\sqrt{|y(t)|}$ avec $y(0) = 0$.

c) Discuter le résultat.

Réponse.