

Série d'exercices n° 3 : Équations différentielles du second ordre

Exercice 1 : (*Équations différentielles incomplètes*)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\text{a) } y'' + y' = t + 2, \quad \text{b) } ty'' = y' + t^2, \quad \text{c) } y^2 y'' + y' = 0, \quad \text{d) } yy'' = y' + (y')^2, \quad \text{e) } y'' = e^{2y}.$$

Exercice 2 : (*Équations type-homogènes*)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\text{a) } 2yy'' - 3(y')^2 = 4ty^2, \quad \text{b) } yy'' - (y')^2 + yy' + ty^2 = 0.$$

Exercice 3 :

Montrer que l'équation différentielle :

$$(1 - t^2) y'' - 2ty' + 2y = 0$$

possède pour solution particulière un polynôme.

En déduire les solutions de cette équation différentielle.

Exercice 4 :

Déterminer une solution particulière de chacune des équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } y'' - 5y' + 6y &= 2e^{4t}, & \text{b) } y'' - y' + y &= 5, & \text{c) } y'' + 2y' + 5y &= \cos t, \\ \text{d) } y'' + y' - 2y &= t + \cos t, & \text{e) } y'' - 3y' + 2y &= e^t \sin(3t), & \text{f) } y'' + 3y' + 2y &= (t^2 + 1)e^{-t}. \end{aligned}$$

En déduire les solutions de ces équations différentielles.

Exercice 5 :

Résoudre en utilisant la méthode de variation des constantes les équations différentielles suivantes :

$$\text{a) } y'' + y = \frac{1}{\cos t}, \quad \text{b) } y'' - y = \frac{1}{(1 + e^{-t})^2}.$$

Exercice 6 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\text{a) } t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0, \quad \text{b) } t^2 y'' + 4ty' + 2y = 2t \operatorname{Log} t, \quad \text{c) } t^2 y'' + ty' + y = 6 - \operatorname{Log} t.$$

Exercice 7 :

En posant $s = \operatorname{Arctg} t$, résoudre l'équation différentielle $(t^2 + 1)^2 y'' + 2t(t^2 + 1)y' + \alpha y = 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + yy' = 0,$

b) $(y + 3(y')^2)y'' - 2(y')^2 = 0,$

c) $y^2 + 2(y')^2 - yy'' = 0,$

d) $y'' + y' - 2y = 4t,$

e) $y'' - 2y' - 3y = e^{-t}(8t + 6),$

f) $y'' + y' - 6y = \operatorname{th} t,$

g) $y'' - 2y' + 5y = \frac{e^t}{\cos t},$

h) $(t^2 - t)y'' + (2 - t)y' - 3y = t^2,$

i) $y'' - 2y' + 2y = e^t \operatorname{tg} t,$

j) $2t^2 y'' + ty' - y = 0,$

k) $y'' + 4y' + \alpha y = e^{-2t}, \alpha \in \mathbb{R},$

l) $t^2 y'' + ty' + y = \operatorname{Log}(xe),$

m) $y'' + 2ty' = -t,$

n) $y'' = y^{-2}y',$

o) $(1 - t^2)y'' - ty' + y = 0.$