USTHB 2018-2019 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
3ème année LAC

Test n^{0}2 - 19 decembre 2018. Durée : 30 minutes

Nom et Prénom :..

Matricule :..

$\overline{\quad\quad}$ **15**

Exercice 1 (8 pts.) :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $ty'' + y' = 0$, **b)** $y'' - 4y' + 4y = e^{2t} + e^{-2t}$.

Réponse.

a) Posons $v = y'$ et remplaçons dans notre équation, on obtient $\dfrac{v'}{v} = -\dfrac{1}{t}$. Par intégration on trouve $v(t) = \dfrac{\lambda}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Il vient $y(t) = \lambda \operatorname{Log}|t| + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) L'équation différentielle en question, est linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y'' - 4y' + 4y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont les racines sont $r = 2$ racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y(t) = (\lambda + \mu t)\, e^{2t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Comme 2 est racine double du polynôme caractéristique $r^2 - 4r + 4$ et -2 n'est pas une racine, cherchons une solution particulière sous la forme $y_p = \alpha t^2 e^{2t} + \beta e^{-2t}$. On a

$$y_p'(t) = \alpha\left(2t^2 + 2t\right) e^{2t} - 2\beta e^{-2t}, \quad y_p''(t) = \alpha\left(4t^2 + 8t + 2\right) e^{2t} + 4\beta e^{-2t}.$$

Alors

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = 2\alpha e^{2t} + 16\beta e^{-2t}.$$

Par identification, on trouve $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{1}{16}$. Les solutions de l'équation non homogène sont donc

$$y(t) = \left(\lambda + \mu t + \tfrac{1}{2}t^2\right) e^{2t} + \tfrac{1}{16} e^{-2t}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

<u>**Exercice 2 (7 pts.)**</u> **:** On considère l'équation différentielle $(E) : (1-t^2)\, y'' - 2ty' + 2y = 0$.

a) Déterminer une solution de l'équation (E) de la forme $y(t) = t^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) On pose alors $y(t) = t^\alpha z(t)$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ?

c) En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Réponse.

a) Soit $y(t) = t^\alpha$ une solution de (E). En remplaçant dans l'équation différentielle (E), on obtient

$$\left(1-t^2\right)\alpha(\alpha-1)\, t^{\alpha-2} - 2t\alpha t^{\alpha-1} + 2t^\alpha = 0 \text{ ou bien } (1-\alpha)\left((\alpha+2)\, t^\alpha - \alpha t^{\alpha-2}\right) = 0.$$

Si $\alpha = 1$, on a alors $t \mapsto y_0(t) = t$ est une solution de (E).

b) On pose $y(t) = tz(t)$. Alors $y'(t) = z(t) + tz'(t)$ et $y''(t) = 2z'(t) + tz''(t)$.

En remplaçant dans l'équation différentielle (E), on obtient

$$\left(1-t^2\right)\left(2z'(t) + tz''(t)\right) - 2t\left(z(t) + tz'(t)\right) + 2tz(t) = 0.$$

En simplifiant, on trouve $(t - t^3)\, z''(t) + (2 - 4t^2)\, z'(t) = 0$.

c) En posant $u = z'$, l'équation différentielle vérifiée par z est équivalente à

$$\frac{u'}{u} = \frac{2-4t^2}{t^3-t} = \frac{-2}{t} - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1},$$

qui est une équation différentielle du premier ordre. Ses solutions sont $u(t) = \dfrac{\lambda}{t^2(t^2-1)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'où

$$z'(t) = \frac{\lambda}{t^2(t^2-1)} = \lambda\left(\frac{-1}{t^2} + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Encore par intégration, on trouve

$$z(t) = \frac{\lambda}{t} + \frac{\lambda}{2}\operatorname{Log}\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Alors les solutions de l'équation différentielle initiale (E_3) sont

$$y(t) = tz(t) = \lambda + \frac{\lambda}{2} t \operatorname{Log}\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \mu t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$