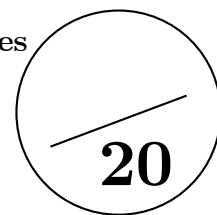




Examen final - 20 janvier 2019. Durée : 1 heure et 15 minutes

Nom et Prénom :

Matricule :



Exercice 1 (5 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $ty' - \alpha y = 1, \alpha \in \mathbb{R}$, b) $tyy' = (y + 1)$,

Réponse.

a) L'équation différentielle $ty' - \alpha y = 1$ est linéaire d'ordre 1, à coefficients non constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $ty' - \alpha y = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{t}$ ou $\frac{dy}{y} = \frac{\alpha dt}{t}$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log} |y(t)| = \alpha \text{Log} |t| + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = Ct^\alpha$, $C \in \mathbb{R}$.

On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t) t^\alpha$. Il vient $t(C'(t) t^\alpha + \alpha t^{\alpha-1} C(t)) - \alpha C(t) t^\alpha = 1$, et donc $C'(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = \frac{-1}{\alpha t^\alpha} \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } C(t) = \text{Log} |t| \text{ si } \alpha = 0.$$

La solution générale de l'équation $ty' - \alpha y = 1$ est donc

$$y = \frac{-1}{\alpha} + \lambda t^\alpha \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } y = \lambda + \text{Log} |t| \text{ si } \alpha = 0 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation $tyy' = (y + 1)$ est à variables séparées, que l'on peut écrire $\left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = \frac{dt}{t}$.

En intégrant $\int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int \frac{dt}{t}$ on trouve $y - \text{Log} |y+1| = \text{Log} |t| + C$ ou beaucoup mieux

$$\text{Log} |e^y| = \text{Log} |\lambda t (y+1)| \text{ où } C = \text{Log} |\lambda|.$$

Finalement, on trouve les courbes intégrales

$$e^y = \lambda t (y+1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

De plus $y \equiv -1$ est une solution singulière.

Suite de l'exercice 1 (5 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes :

c) $y'' - 3y' + 2y = e^t$, **d)** $y'' + y = 4 \cos t - 2 \sin t$.

Réponse.

c) On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0$, dont les racines sont 1 et 2. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $y_h = \lambda e^t + \mu e^{2t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme 1 est une racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = a t e^t$. En dérivant, on trouve

$$y'_p = a(t+1)e^t, \quad y''_p = a(t+2)e^t \quad \text{et} \quad y''_p - 3y'_p + 2y_p = -a e^t = e^t.$$

Donc $a = -1$ et $y_p = -t e^t$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est

$$y = (\lambda - t) e^t + \mu e^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

d) Le polynôme caractéristique est $P(r) = r^2 + 1$ dont les racines sont i et $-i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $y_h = \lambda \cos t + \mu \sin t$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = t(a \cos t + b \sin t)$. On a alors

$$y'_p = (a + bt) \cos t + (b - at) \sin t, \quad y''_p = (2b - at) \cos t - (2a + bt) \sin t$$

et

$$y''_p + y_p = 2b \cos t - 2a \sin t = 4 \cos t - 2 \sin t.$$

Après identification des coefficients, on trouve une solution particulière pour $a = 1$ et $b = 2$. Les solutions de l'équation non homogène sont donc les fonctions de la forme

$$y = (\lambda + t) \cos t + (\mu + 2t) \sin t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 (5 pts.) : On considère l'équation différentielle : $(E_1) : 2 \sin(y^2) + (ty \cos(y^2)) y' = 0$.

- a) Vérifier que l'équation (E_1) n'est pas exacte (n'est pas au différentielle totale).
- b) Chercher un facteur intégrant de (E_1) sous la forme $\mu(t, y) = g(t)$.
- c) Trouver la solution générale de (E_1) .

Réponse.

a) L'équation (E_1) se réécrit : $2 \sin(y^2) dt + ty \cos(y^2) dy = 0$. Cette équation n'est pas exacte puisque

$$\begin{cases} P(t, y) = 2 \sin(y^2) \rightarrow \frac{\partial P(t, y)}{\partial y} = 4y \cos(y^2) \\ Q(t, y) = ty \cos(y^2) \rightarrow \frac{\partial Q(t, y)}{\partial t} = y \cos(y^2) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P(t, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(t, y)}{\partial t}.$$

b) Un facteur intégrant de (E_1) sous la forme $\mu(t, y) = g(t)$ vérifie

$$\frac{\partial (g(t) P(t, y))}{\partial y} = \frac{\partial (g(t) Q(t, y))}{\partial t} \text{ ou } 4g(t) y \cos(y^2) = g'(t) \cdot ty \cos(y^2) + g(t) y \cos(y^2)$$

Après simplification $g(t)$ vérifie $3g(t) = tg'(t)$. On résout cette équation, on trouve $\mu = g(t) = t^3$.

c) En multipliant l'équation (E_1) par t^3 on obtient $2t^3 \sin(y^2) + (t^4 y \cos(y^2)) y' = 0$.

Cette fois on a bien $\frac{\partial P(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(t, y)}{\partial t} = 4t^3 y \cos(y^2)$.

Donc on a affaire à une différentielle totale d'une certaine fonction u vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2t^3 \sin(y^2) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = t^4 y \cos(y^2).$$

En intégrant $\frac{\partial u}{\partial t}$ par rapport à t on trouve $u = \frac{1}{2} t^4 \sin(y^2) + h(y)$. En dérivant par rapport à y

on trouve $\frac{\partial u}{\partial y} = t^4 y \cos(y^2) = t^4 y \cos(y^2) + h'(y)$. Donc on peut prendre $h(y) = 0$. On obtient

alors $u = \frac{1}{2} t^4 \sin(y^2)$. Finalement les courbes intégrales (la solution générale) ont pour équation $t^4 \sin(y^2) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (5 pts.) : On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_2) : y'' - y' - e^{2t}y = e^{3t}$.

Soit y une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$. Pour $s \in]0, +\infty[$, on pose $z(s) = y(\text{Log } s)$.

- a) Calculer pour $s \in]0, +\infty[$, $z'(s)$ et $z''(s)$.
- b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $t = \text{Log } s$ dans (E_2)).
- c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
- d) En déduire la solution générale de l'équation (E_2) sur $\mathbb{R}$.

Réponse.

a) On doit dériver une fonction composée. On trouve

$$z'(s) = \frac{d}{ds} (\text{Log } s) \cdot y'(\text{Log } s) = \frac{1}{s} y'(\text{Log } s),$$

et

$$z''(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \right) \cdot y'(\text{Log } s) + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} y''(\text{Log } s) = \frac{-1}{s^2} y'(\text{Log } s) + \frac{1}{s^2} y''(\text{Log } s).$$

b) En posant, comme indiqué dans l'énoncé, $t = \text{Log } s$, (E_2) se réécrit :

$$y''(\text{Log } s) - y'(\text{Log } s) - s^2 y(\text{Log } s) = s^3.$$

On exprime ensuite $y'(\text{Log } s)$ et $y''(\text{Log } s)$ en fonction de $z'(s)$ et de $z''(s)$. On trouve :

$$y'(\text{Log } s) = sz'(s) \text{ et } y''(\text{Log } s) = s^2 z''(s) + y'(\text{Log } s) = s^2 z''(s) + sz'(s).$$

En introduisant cela dans (E_2) , on obtient

$$s^2 z''(s) + sz'(s) - sz'(s) - s^2 z(s) = s^3 \Leftrightarrow z''(s) - z(s) = s.$$

c) Il s'agit maintenant d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$, dont les solutions sont $r = 1$ et $r = -1$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$z(s) = \lambda e^s + \mu e^{-s}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons maintenant une solution de l'équation avec second membre. On peut chercher une solution de la forme $z_p(s) = as + b$. On a alors

$$z'_p(s) = a \text{ et } z''_p(s) = 0.$$

Après identification des coefficients, on trouve $z_p(s) = -s$. Les solutions de l'équation différentielle $z''(s) - z(s) = s$ sont donc les fonctions de la forme

$$z(s) = -s + \lambda e^s + \mu e^{-s}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

d) On revient à y par $z(s) = y(\text{Log } s)$ et $t = \text{Log } s$. On trouve que si y est solution de l'équation (E_2) , alors on a

$$y(t) = -e^t + \lambda e^{e^t} + \mu e^{-e^t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$