

Série d'exercices n° 1 : Généralités sur les équations différentielles

Exercice 1 :

Trouver les équations différentielles qui ont pour solution générale les fonctions $y = f(t)$ données ci-dessous, α , β et γ étant des constantes.

a) $y = \alpha t$

b) $y = \alpha e^t$

c) $y = \sin(t + \alpha)$

d) $y = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta$

e) $y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$

f) $t^2 y^3 + t^3 y^5 = \alpha$.

Exercice 2 :

Montrer que si dans l'équation d'ordre n

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

la variable t n'entre pas explicitement, alors son ordre peut être abaissé d'une unité à l'aide du changement de variable et de fonction $y' = v(y)$ où v est la nouvelle fonction inconnue.

Exercice 3 :

Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires, et donner leur ordre

a) $y' + y - t = 0$

b) $y'' - y' = 2y$

c) $y''' + ty - 2y = \sin t$

d) $(2 - y)y' + y = \ln t$

e) $y'' + \sin y = 1$

f) $y^{(5)} + y^2 = t$.

Exercice 4 :

À l'aide du changement de variables ou de dérivation, ramener les équations suivantes sous forme linéaire

a) $t = (y^2 - 2y + 1)y'$

b) $(t + 1)(yy' - 1) = y^2$

c) $y(t) = \int_0^t y(s) ds + t + 1$

d) $\int_0^t (t - s)y(s) ds = 2t + \int_0^t y(s) ds$.

Exercice 5 :

Montrer que $y = 2t + \lambda e^t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 2(1 - t)$ et trouver la solution particulière dont la courbe intégrale passe par le point $t = 0, y = 3$.

Exercice 6 :

À l'aide du changement de fonctions $z = y, w = y'$, transformer l'équation différentielle

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

à un système d'équations du premier ordre.