
Chapitre 2

Équations différentielles du premier ordre

Sommaire

2.1	Équations incomplètes	9
2.1.1	Incomplète en y ou absence de y ; équation du type $F(t, y') = 0$. . .	9
2.1.2	Incomplète en t ou absence de t ; équation du type $F(y, y') = 0$. . .	10
2.2	Équations à variables séparées	11
2.3	Équations différentielles type-homogènes	12
2.4	Équations différentielles linéaires	13
2.4.1	Méthode de la variation de la constante	14
2.4.2	Équations différentielles linéaires à coefficients constants	15
2.5	Autres types d'équations différentielles	19
2.5.1	Équation de Bernoulli	19
2.5.2	Équation de Riccati	21
2.6	Exercices	22
2.7	Solution des exercices	23

Dans ce chapitre, nous examinerons un certain nombre de types classiques d'équations différentielles du premier ordre. Nous nous concentrons ici sur les techniques de résolution

explicites qui peut amener le calcul des solutions aux calculs des primitives. L'étude théorique telle que l'existence et l'unicité de solutions sera traité plus tard dans un autre chapitre.

Il n'existe pas de méthode générale de la résolution explicite d'une équation différentielle. La première démarche à faire pour résoudre une équation différentielle, est de déterminer l'ordre et le type d'équation auquel on a affaire et ensuite, si c'est l'un des types usuels, on applique la méthode standard, sinon on peut essayer des changements de fonctions ou changements de variables.

La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est

$$F(t, y, y') = 0.$$

Sa forme normale ou résolue s'écrit

$$y' = f(t, y).$$

Nous resterons dans le cas scalaire, parce qu'il est plus facile à manipuler et à comprendre. Le cas où F sera à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ et ≥ 2 sera traité plus tard.

2.1 Équations incomplètes

On distingue deux types possibles : incomplète en y et incomplète en t .

2.1.1 Incomplète en y ou absence de y ; équation du type $F(t, y') = 0$

Trois cas usuels :

i) Équation résoluble sous la forme $y' = f(t)$, il suffit d'intégrer on obtient

$$y = \int f(t) dt = g(t) + C,$$

où C est la constante d'intégration, les courbes intégrales se déduisent de l'une d'elles par des translations parallèles à l'axe des y .

ii) Équation résoluble sous la forme $t = f(y')$, on pose $y' = s$ d'où $t = f(s)$, $dt = f'(s)ds$, $dy = sdt$ donne $dy = sf'(s)ds$, et une intégration par parties donne

$$y = sf(s) - \int f(s)ds = g(s) + C.$$

On trouve les courbes paramétrées $(t, y) = (f(s), g(s) + C)$.

iii) Équation susceptible d'un paramétrage $t = f(s)$, $y' = g(s)$, on tire $dy = g(s)f'(s)ds$ donc $y = \varphi(s) + C$, d'où encore des courbes paramétrées.

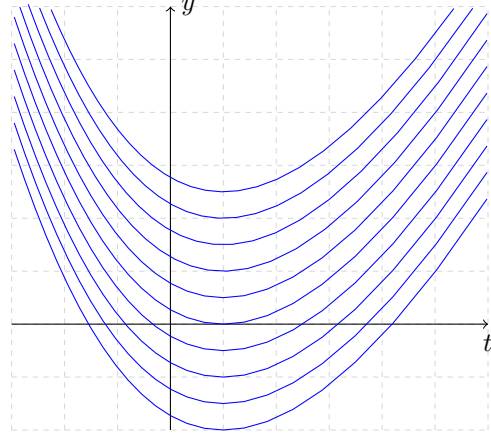
Exemple 12

Soit l'équation $y' + e^{y'} = t$.

On pose $y' = s$ ou $\frac{dy}{dt} = s$, d'où $t = s + e^s$ et $\frac{dt}{ds} = 1 + e^s$ donc $\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = s + se^s$. Par intégration par parties on trouve $y = \frac{1}{2}s^2 + (s - 1)e^s + C$.

Les courbes intégrales sont données sous forme paramétriques par

$$(t, y) = (s + e^s, \frac{1}{2}s^2 + (s - 1)e^s + C), C \in \mathbb{R}.$$



2.1.2 Incomplète en t ou absence de t ; équation du type $F(y, y') = 0$

Plusieurs cas sont possibles :

i) Si on a $y' = f(y)$ alors $dt = \frac{dy}{f(y)}$ et donc $t = g(y) + C$. Les courbes intégrales déduites de l'une d'entre elles par translations parallèles à l'axe des t .

ii) Si $y = f(y')$, on pose $y' = s$ d'où $y = f(s)$ et donc $sdt = dy = f'(s)ds$. Alors $dt = \frac{f'(s)}{s}ds$ et $t = \int \frac{f'(s)}{s}ds = \varphi(s) + C$.

iii) Paramétrage de $F(y, y') = 0$ sous la forme $y = f(s)$ et $y' = g(s)$.

On a $dy = f'(s)ds = g(s)ds$ d'où la solution donne $t = \varphi(s) + C$ si $g(s) \neq 0$.

Exemple 13

Considérons l'équation $y' = \sin y$.

On a $dy = (\sin y)dt$ ou $dt = \frac{dy}{\sin y}$

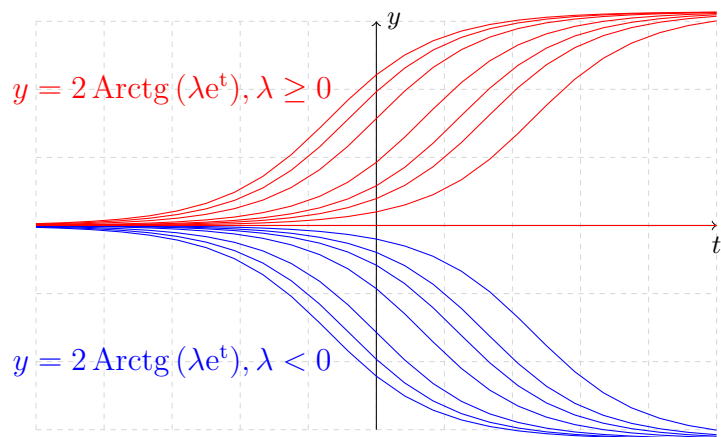
alors $t = \int \frac{1}{\sin y} dy$.

Posons $s = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$, on obtient

$$t = \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| + C$$

ce qui donne

$$y = 2 \operatorname{Arctg} (\lambda e^t) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Exemple 14

Soit l'équation $y^2 + (y')^2 - 1 = 0$.

Posons $y = \sin s$, $y' = \cos s$ (sans oublier que $y' = \frac{dy}{dt}$).

On a donc $dy = (\cos s) ds$ et $dy = y' dt = (\cos s) dt$, alors $(\cos s) ds = (\cos s) dt$.

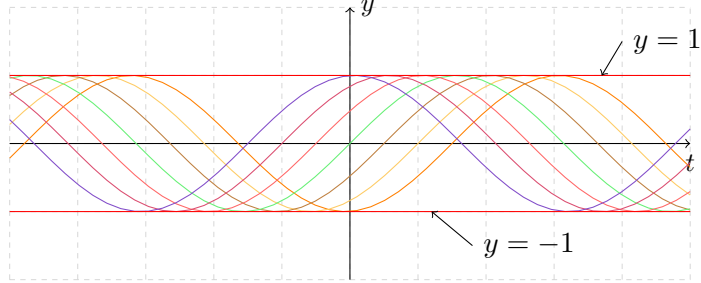
Si $\cos s \neq 0$, $ds = dt$ ce qui donne

$s = t + \lambda$ donc

$$y = \sin(t + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $\cos s = 0$, $s = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc

$$y = 1 \text{ ou } y = -1.$$



2.2 Équations à variables séparées

On appelle équation à variables séparées une équation différentielle du premier ordre $F(t, y, y') = 0$ qui peut se mettre sous la forme

$$f(y)y' = g(t).$$

Ou encore, avec $y' = \frac{dy}{dt}$ elle s'écrit

$$f(y)dy = g(t)dt,$$

En d'autres termes, les équations à variables séparées sont les équations dans lesquelles on peut regrouper t, dt d'une part et y, dy d'autre part. Elles s'intègrent en

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt, \text{ soit } F(y) = G(t) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 15

L'équation $t^2 y' = e^y$ donne

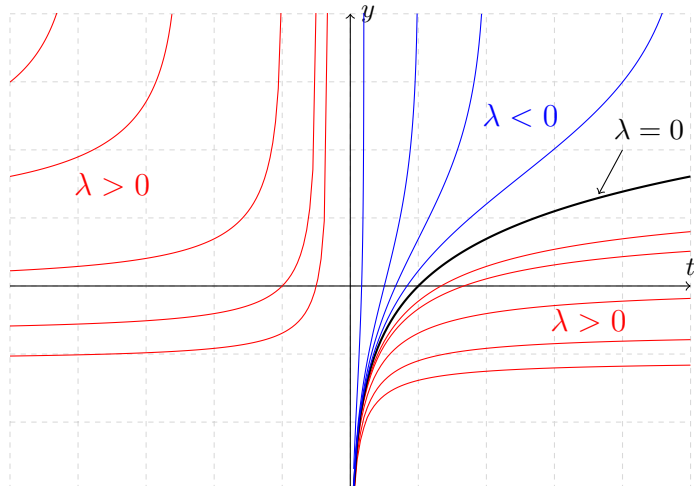
$$e^{-y} y' = \frac{1}{t^2} \text{ ou bien } e^{-y} dy = \frac{dt}{t^2},$$

ce qui donne par intégration

$$e^{-y} = \frac{1}{t} + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On obtient finalement

$$y = \text{Log} \left(\frac{t}{1 + \lambda t} \right), \lambda \in \mathbb{R}.$$



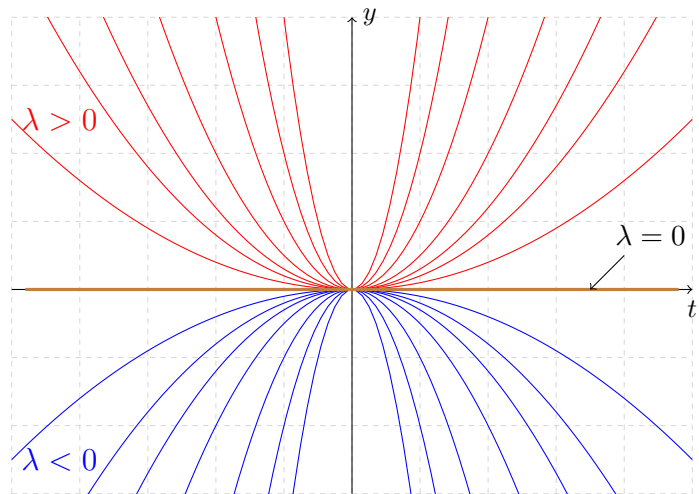
Exemple 16

L'équation $ty' = 2y$ l'on peut écrire $\frac{dy}{y} = 2\frac{dt}{t}$. On intègre alors $\int \frac{dy}{y} = \int 2\frac{dt}{t}$ ce qui donne $\text{Log } |y| = 2\text{Log } |t| + C$ ou beaucoup mieux

$$\text{Log } \left| \frac{y}{\lambda} \right| = \text{Log } |t|^2 \quad \text{où } C = \text{Log } |\lambda|.$$

Finalement, on trouve

$$y = \lambda t^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$


Remarque 10

On remarque que les équations incomplètes $y' = f(t)$ et $y' = g(y)$ sont des cas particuliers des équations à variables séparées.

2.3 Équations différentielles type-homogènes

Définition 11 (Équations différentielles *type-homogènes*)

On appelle équation différentielle *type-homogène* toute équation différentielle de la forme

$$F\left(y', \frac{y}{t}\right) = 0. \quad (2.1)$$

Elle se reconnaît au fait qu'elle est invariante par le changement de (t, y) en $(\lambda t, \lambda y)$, c'est-à-dire par une homothétie de centre O . Plusieurs cas se présentent suivant la forme pratique de (2.1).

- a) Si on peut résoudre (2.1) sous la forme $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$, on pose $s = \frac{y}{t}$, $y = st$, $y' = \frac{dy}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} = f(s)$, c'est une équation à variables séparées. On peut aussi utiliser les coordonnées polaires, c'est-à-dire posons $t = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ et chercher $\rho(\theta)$.
- b) Si on peut résoudre (2.1) sous la forme $y = tf(y')$, on pose $y' = u$, les variables se séparent et on arrive à un paramétrage des courbes intégrales.

Exemple 17

Soit $t(y')^2 - 2yy' + t = 0$, ou bien $y = \frac{t}{2} \left(y' + \frac{1}{y'} \right)$.

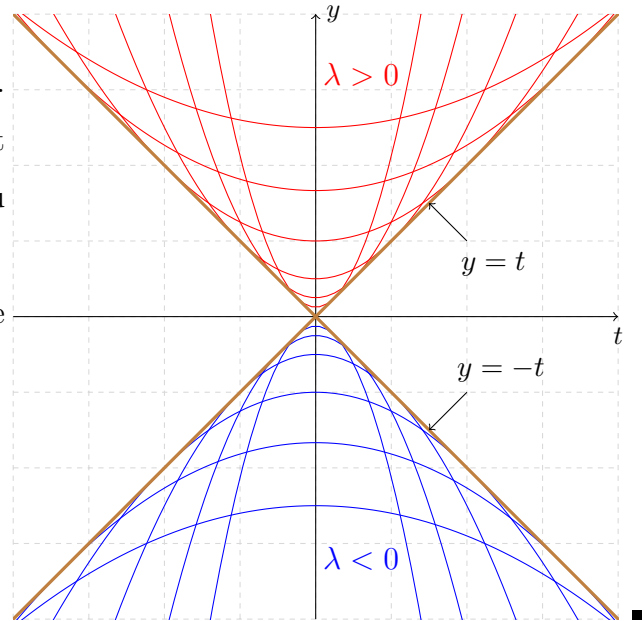
En posant $y' = u$ il vient $y = \frac{t}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right)$ et donc $dy = \frac{dt}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) + \frac{t}{2} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) du = u dt$ d'où $(u^2 - 1) dt = t(u^2 - 1) \frac{du}{u}$.

Si $u^2 - 1 \neq 0$ alors $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$, soit à une homothétie près $u = \lambda t$, qui donne

$$y_\lambda = \frac{1}{2} \left(\lambda t^2 + \frac{1}{\lambda} \right), \quad \lambda \neq 0.$$

Si $u^2 - 1 = 0$ alors $u = \pm 1$ qui donne

$$\bar{y}_1 = t, \quad \text{et} \quad \bar{y}_2 = -t.$$



2.4 Équations différentielles linéaires

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle est de la forme

$$a(t) y' + b(t) y = c(t), \quad (2.2)$$

où a, b et c sont des fonctions données de t , continues dans le domaine où il s'agit d'intégrer l'équation (2.2). La fonction c est appelée second membre de l'équation différentielle, a et b sont appelées les coefficients.

Si $c(t) \equiv 0$ on dit que l'équation (2.2) est linéaire homogène ou sans second membre

$$a(t) y' + b(t) y = 0. \quad (2.3)$$

La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = -\frac{b(t)}{a(t)}$ ou $\frac{dy}{y} = -\frac{b(t)}{a(t)} dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient

$$\text{Log } |y(t)| = - \int g(t) dt + K, \quad \text{avec } g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque valeur de K , cela donne deux solutions, l'une toujours positive $y = e^K e^{-\int g(t) dt}$, l'autre toujours négative $y = -e^K e^{-\int g(t) dt}$.

On retrouve toutes ces solutions, y compris la solution nulle, en disant que la solution générale de l'équation homogène $a(t) y' + b(t) y = 0$ est

$$y_h = C e^{-\int g(t) dt}, \quad g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si la valeur de la solution en $t = 0$ est donnée, on écrit souvent $y(t) = y(0) e^{-\int_0^t g(s) ds}$.

Si nous supposons que $t \mapsto y_p(t)$ est une solution particulière de (2.2), on pose $y = y_p + u$ dans (2.2). Il vient

$$a(t) y_p' + b(t) y_p + a(t) u' + b(t) u = c(t).$$

Or $a(t) y_p' + b(t) y_p = c(t)$, donc $a(t) u' + b(t) u = 0$, soit u une solution de l'équation homogène (2.3). Ainsi la solution générale de l'équation (2.2) avec second membre est la somme d'une solution particulière de cette même équation (2.2), et de la solution générale de l'équation homogène associée (2.3).

$$y(t) = \underbrace{y_p(t)}_{\text{Solution particulière de (2.2)}} + \underbrace{y_h(t)}_{\text{Solution de l'équation homogène (2.3)}} = y_p(t) + C e^{-\int g(t) dt}, \quad g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}.$$

Exemple 18

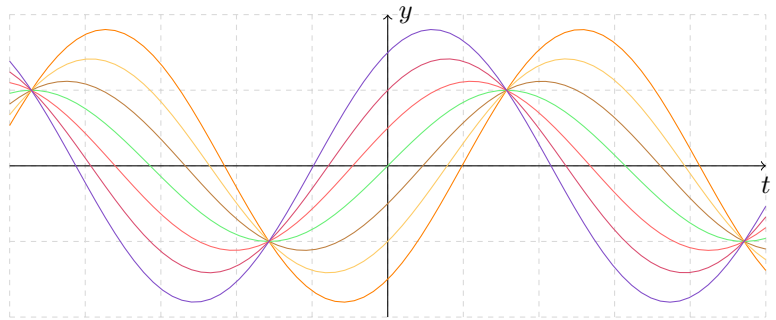
L'équation $y' \cos t + y \sin t = 1$ admet comme solution particulière $y_p = \sin t$.

La solution de l'équation homogène

associée $y' \cos t + y \sin t = 0$ est $y_h = \lambda \cos t, \lambda \in \mathbb{R}$.

Alors la solution générale de $y' \cos t + y \sin t = 1$ est

$$y = \sin t + \lambda \cos t, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



2.4.1 Méthode de la variation de la constante

Si aucune solution évidente de $a(t) y' + b(t) y = c(t)$ n'apparaît, on peut utiliser la méthode dite de *variation de la constante*, c'est-à-dire que l'on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t) e^{-\int g(t) dt}$, $g(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$, où $t \mapsto C(t)$ est une nouvelle fonction inconnue de t . Il vient

$$a(t) \left(C'(t) e^{-\int g(t) dt} - C(t) \frac{b(t)}{a(t)} e^{-\int g(t) dt} \right) + b(t) C(t) e^{-\int g(t) dt} = c(t),$$

et donc

$$C'(t) = \frac{c(t)}{a(t)} e^{\int g(t) dt}, \quad g(t) = \frac{b(t)}{a(t)},$$

ce qui permet, en intégrant de trouver $C(t)$.

Exemple 19

Soit l'équation $(t^2 + 1) y' + 3ty = t^2$.

L'équation sans second membre (homogène) associée est $(t^2 + 1) y' + 3ty = 0$. C'est une équation

à variables séparables. Sa solution générale est $y = C \cdot (t^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$.

Cherchons la solution générale de l'équation non homogène sous la forme $y = C(t) (t^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$, où $t \mapsto C(t)$ est une fonction inconnue de t . En portant dans l'équation non homogène, on trouve

$$(t^2 + 1) \left(C'(t) (t^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} + C(t) (-3t) (t^2 + 1)^{-\frac{5}{2}} \right) + 3tC(t) (t^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} = t^2.$$

Après simplification on obtient

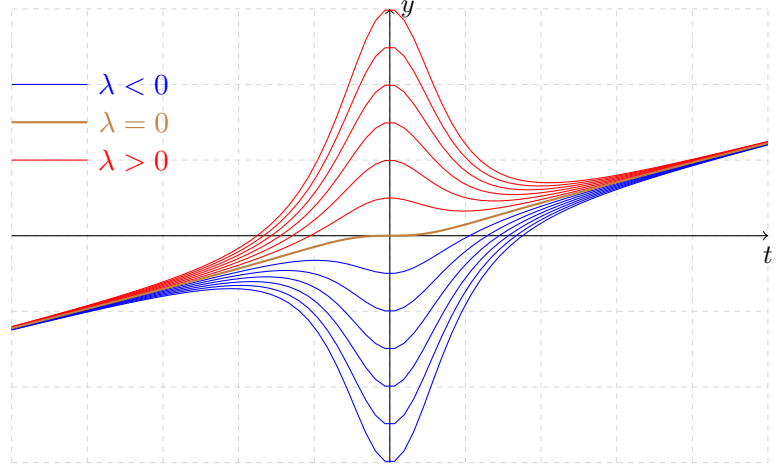
$$C'(t) = t^2 \sqrt{t^2 + 1}.$$

Si on pose $t = \text{Sh } u$, on trouve

$$C(t) = \frac{t}{8} (2t^2 + 1) \sqrt{t^2 + 1} - \frac{1}{8} \text{Argsh } t + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

La solution générale est donc

$$y = \lambda (t^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{t}{8} \frac{2t^2 + 1}{t^2 + 1} - \frac{1}{8} (t^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \text{Argsh } t, \lambda \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$



2.4.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant est une équation de la forme

$$y'(t) + ay(t) = b(t), \quad (2.4)$$

c'est le coefficient de y qui est constant.

Dans ce cas la solution générale de l'équation homogène associée $y'(t) + ay(t) = 0$ est

$$y_h = C e^{-at}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière peut être déduite à partir de la méthode de variation de la constante exposée précédemment

$$y_p = e^{-at} \int e^{at} b(t) dt.$$

Alors la solution générale de l'équation non homogène (2.4) est

$$y = y_h + y_p = C e^{-at} + e^{-at} \int e^{at} b(t) dt, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres $b(t)$ spécifiques

La méthode de variation des constantes marche toujours ; cependant, dans bien des cas, il existe une solution particulière y_p qui "ressemble" à $b(t)$. Le type de la fonction $b(t)$ nous indique sous quelle forme la chercher, et il ne reste plus qu'à ajuster les coefficients. Cela conduit en général à des calculs plus simple que la méthode de variation de la constante. Les exemples ci-dessous montrent comment s'y prendre pour trouver une telle solution particulière.

- Si $b(t)$ est un polynôme de degré n :

Chercher une solution qui soit un polynôme de degré n .

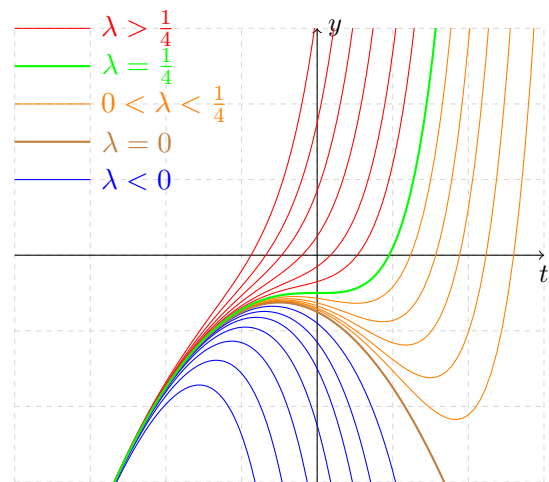
Exemple 20

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - 2y = t^2 + 1.$$

Posons $y_p = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ et remplaçons dans l'équation : $2\alpha t + \beta - 2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = t^2 + 1$.

En identifiant, on trouve alors $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = -\frac{3}{4}$. Une solution particulière est donc $y_p = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$. D'où la solution générale est $y = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + \lambda e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}$.



- Si $b(t)$ est de la forme ce^{rt} , avec r différent de $-a$:

Chercher une solution de la forme αe^{rt} .

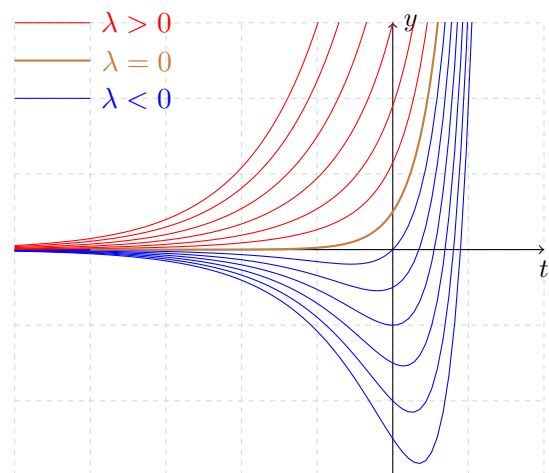
Exemple 21

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - y = e^{3t}.$$

Posons $y_p = \alpha e^{3t}$ et remplaçons dans l'équation : $3\alpha e^{3t} - \alpha e^{3t} = e^{3t}$, et donc $\alpha = \frac{1}{2}$. Une solution particulière est alors $y_p = \frac{1}{2}e^{3t}$. D'où la solution générale est

$$y = \frac{1}{2}e^{3t} + \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}.$$



- Si $b(t)$ est de la forme ce^{-at} :

Chercher une solution de la forme $\alpha t e^{-at}$.

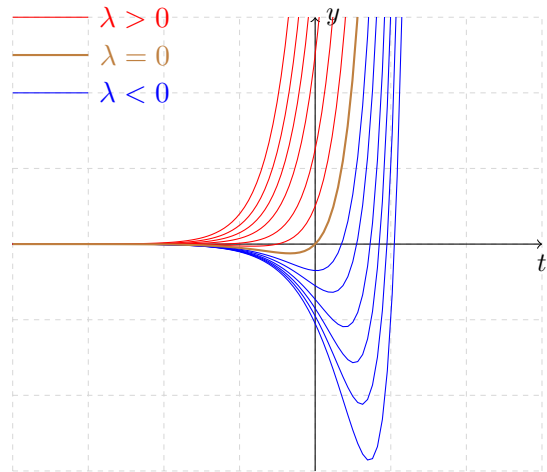
Exemple 22

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - 3y = e^{3t}.$$

Posons $y_p = \alpha t e^{3t}$ et remplaçons dans l'équation : $3\alpha t e^{3t} + \alpha e^{3t} - 3\alpha t e^{3t} = e^{3t}$, donc $\alpha = 1$. Une solution particulière est donc $y_p = t e^{3t}$. D'où la solution générale

$$y = (t + \lambda) e^{3t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$



- Si $b(t)$ est de la forme $p(t) e^{rt}$, où p est un polynôme de degré n :

Chercher une solution de la forme $q(t) e^{rt}$, où q est un polynôme de degré n si $r \neq -a$, et de degré $n + 1$ si $r = -a$.

Exemple 23

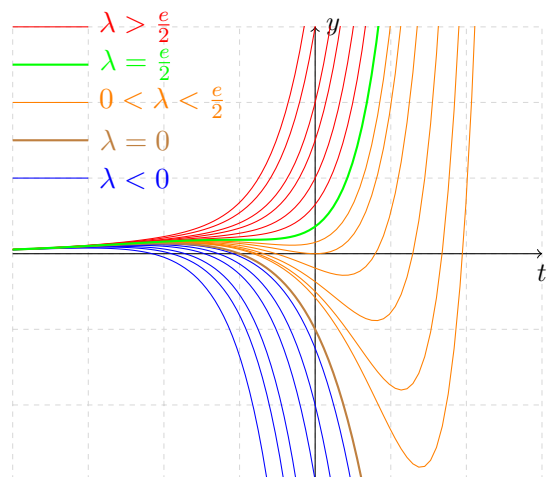
Cherchons une solution de l'équation $y' - 2y = t e^t$.

Posons $y_p = (\alpha t + \beta) e^t$ et remplaçons dans l'équation

$$(\alpha t + \beta) e^t + \alpha e^t - 2(\alpha t + \beta) e^t = t e^t.$$

En identifiant, on trouve $\alpha = \beta = -1$. Une solution particulière est donc $y_p = -(t + 1) e^t$. D'où la solution générale est

$$y = -(t + 1) e^t + \lambda e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$


Exemple 24

Cherchons une solution de l'équation $y' - 2y = (t + 1) e^{2t}$.

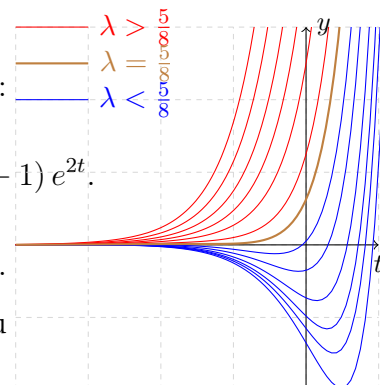
Posons $y_p = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma) e^{2t}$ et remplaçons dans l'équation :

$$2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) e^{2t} + (2\alpha t + \beta) e^{2t} - 2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) e^{2t} = (t + 1) e^{2t}.$$

En identifiant, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ et γ est quelconque.

Une solution particulière est donc $y_p = (\frac{1}{2}t^2 + t + \gamma) e^{2t}$. D'où

la solution générale est $y = (\frac{1}{2}t^2 + t + \lambda) e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}$.



■

- Si $b(t)$ est de la forme $c \cos(rt) + d \sin(rt)$:

Chercher une solution de la forme $\alpha \cos(rt) + \beta \sin(rt)$.

Exemple 25

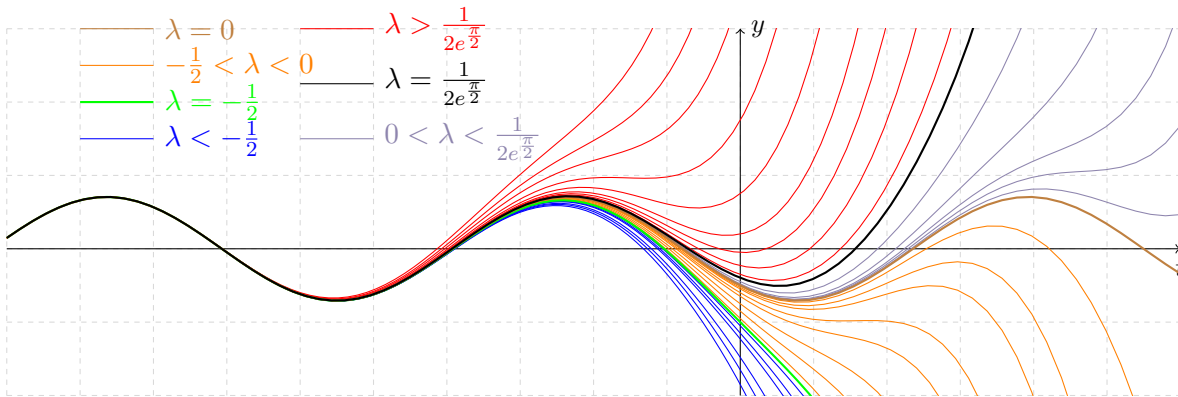
Cherchons une solution de l'équation $y' - y = \sin t$.

Posons $y_p = \alpha \cos t + \beta \sin t$ et remplaçons dans l'équation :

$$-\alpha \sin t + \beta \cos t - (\alpha \cos t + \beta \sin t) = \sin t.$$

En identifiant, on trouve $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Une solution particulière est donc $y_p = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.

D'où la solution générale est $y = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}$.



■

- Si $b(t)$ est la somme de plusieurs fonctions $b_1(t), \dots, b_k(t)$ qui sont chacune d'un des types ci-dessus :

Chercher pour i de 1 à k une solution particulière $s_i(t)$ de chacune des équations

$y' + ay = b_i(t)$. La fonction $s_1(t) + \dots + s_k(t)$ sera solution particulière de $y' + ay = b(t)$.

Exemple 26

Cherchons une solution de l'équation

$$y' - y = 2t + \sin t.$$

Une solution particulière de $y' - y = 2t$ est

$$y_{p_1} = -2t - 2.$$

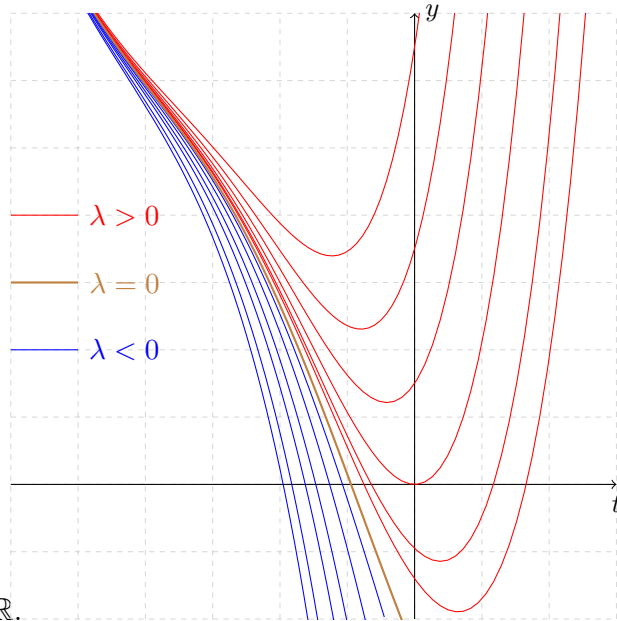
Une solution particulière de $y' - y = \sin t$

$$\text{est } y_{p_2} = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t).$$

Donc $y_p = -2(t+1) - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ est solution particulière de $y' - y = 2t + \sin t$.

Sa solution générale est donc

$$y = -2(t+1) - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}.$$



■

Résumons les cas ci-dessus dans le tableau suivant.

Second membre $b(t)$	Solution particulière $y_p(t)$
$b(t)$ est un polynôme de degré n	$y_p(t)$ est un polynôme de degré n
$b(t) = ce^{rt}$, avec $r \neq -a$	$y_p(t) = \alpha e^{rt}$
$b(t) = ce^{-at}$	$y_p(t) = \alpha t e^{-at}$.
$b(t) = p(t) e^{rt}$, $r \neq -a$, p polynôme de degré n	$y_p(t) = q(t) e^{rt}$, q polynôme de degré n
$b(t) = p(t) e^{rt}$, $r = -a$, p polynôme de degré n	$y_p(t) = q(t) e^{rt}$, q polynôme de degré $n+1$
$b(t) = c \cos(rt) + d \sin(rt)$	$y_p(t) = \alpha \cos(rt) + \beta \sin(rt)$

2.5 Autres types d'équations différentielles

2.5.1 Équation de Bernoulli

Une équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y + b(t)y^m, \quad (2.5)$$

où m est différent de 0 et 1 et où a et b sont des applications définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. En général, m est un entier naturel, mais on peut prendre m réel à condition de chercher y à valeurs strictement positives. En général, a et b sont des fonctions continues.

Exemple 27

$ty' + y - y^2 \operatorname{Log} t = 0$ et $t^2 y' + y = t\sqrt{y}$ sont des équations différentielles de Bernoulli. ■

Méthode de résolution

Les cas particuliers $m = 0$ et $m = 1$ donnent des équations linéaires, qui ont déjà été traités ci-dessus.

Le principe de la méthode, si $m \neq 1$ et $m \neq 0$, est de diviser les deux membres de (2.5) par y^m . On obtient alors

$$\frac{y'}{y^m} - a(t) \frac{1}{y^{m-1}} = b(t).$$

On effectue un changement de fonction en posant $z = \frac{1}{y^{1-m}}$, il vient donc $\frac{1}{1-m} z' - a(t) z = b(t)$, alors z est la solution d'une équation linéaire du premier ordre. On la résout et on en déduit une expression de y .

Exemple 28

($m = 2$) : $y' = y + t^2 y^2$ on divise par y^2 , et cela donne $\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = t^2$. En posant $z = \frac{1}{y}$ on obtient $z' + z = -t^2$ équation linéaire.

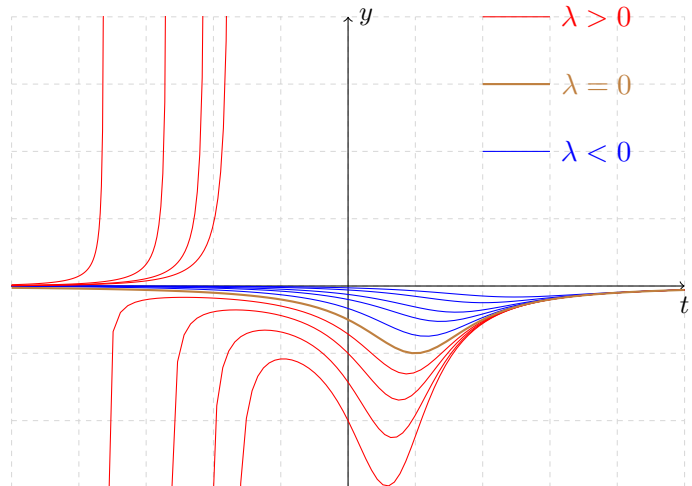
La solution de l'équation homogène associée est $z_h = \lambda e^{-t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Avec la méthode de la variation de la constante on trouve

$$z(t) = \lambda e^{-t} - t^2 + 2t - 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$y(t) = \frac{1}{\lambda e^{-t} - t^2 + 2t - 2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

■



2.5.2 Équation de Riccati

Une équation différentielle de Riccati est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \quad (2.6)$$

où a, b et c sont trois fonctions, souvent choisies continues sur un intervalle commun I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

L'intégration d'une équation différentielle de Riccati nécessite la connaissance d'une solution particulière de cette équation.

Méthode de résolution

On suppose comme solution particulière y_1 et on pose $y = z + y_1$. En remplaçant y par sa valeur dans (2.6) on trouve $z' = a(t)z^2 + (2a(t)y_1 + b(t))z$, a, b et c sont des fonctions continues sur l'ouvert I . Donc z est solution d'une équation de Bernoulli, qui a déjà été traité ci-dessus.

Exemple 29

L'équation différentielle

$$t(t-1)y' + y^2 - (2t+1)y = -2t,$$

est une équation de Riccati avec

$$a(t) = \frac{-1}{t(t-1)}, b(t) = \frac{2t+1}{t(t-1)} \text{ et } c(t) = \frac{2}{1-t}.$$

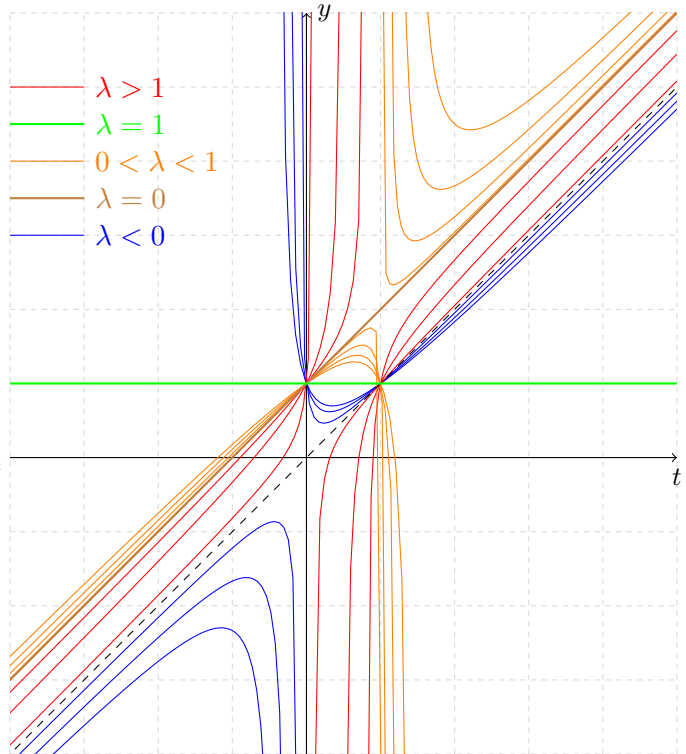
Notons que $y_1 = t$ est solution particulière. En posant $y = t + z$ il vient $t(t-1)z' - z + z^2 = 0$. En divisant par $t(t-1)$ on obtient une équation de Bernoulli avec $m = 2$,

$$z' = \frac{1}{t(t-1)}z - \frac{1}{t(t-1)}z^2,$$

d'où $z(t) = \frac{t-1}{\lambda t - 1}$, donc

$$y(t) = t + \frac{t-1}{\lambda t - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

■



2.6 Exercices

Exercice 2.1

(*Variables séparées*) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\textbf{a)} \ y' = y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \textbf{b)} \ y' = (1 - y) y, \quad \textbf{c)} \ y' = t\sqrt{1 - y^2}.$$

Exercice 2.2

(*Équations type-homogènes*) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\textbf{a)} \ 4yy' + t = 0, \quad \textbf{b)} \ t^2y' = y^2.$$

Exercice 2.3

(*Équations différentielles linéaires*) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\textbf{a)} \ y' + y = \cos t, \quad \textbf{b)} \ y' + 2ty = 4t, \quad \textbf{c)} \ y' - y = te^t.$$

Exercice 2.4

(*Équations de Bernoulli et de Ricatti*) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\textbf{a)} \ ty' + y = t^2y^2, \quad \textbf{b)} \ y' + \frac{1}{t}y = y^2 - \frac{1}{t^2}.$$

2.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 2.1.

- a) $y' = y^\alpha$ ou $\frac{dy}{dt} = y^\alpha$. La fonction nulle lorsque $\alpha \geq 0$ est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{dy}{y^\alpha} = dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient

$$\alpha = 1 : \quad \text{Log } |y(t)| = t + K, \text{ avec } K \in \mathbb{R}, \text{ ou bien } y = Ce^t, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\alpha \neq 1 : \quad \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t + K, \text{ avec } K \in \mathbb{R}, \text{ ou bien } y = ((1-\alpha)t + C)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- b) $y' = (1-y)y$, ou $\frac{dy}{dt} = (1-y)y$, que l'on peut écrire $\frac{dy}{(1-y)y} = dt$ ou $\frac{dy}{1-y} + \frac{dy}{y} = dt$.

En intégrant $\int \frac{dy}{1-y} + \int \frac{dy}{y} = \int dt$ on trouve $-\text{Log } |1-y| + \text{Log } |y| = t + C$ ou beaucoup mieux

$$\text{Log } \left| \frac{y}{1-y} \right| = t + C.$$

Finalement, on trouve les courbes intégrales

$$\frac{y}{1-y} = \lambda e^t, \quad \lambda = \pm e^C \in \mathbb{R} \quad \text{ou bien} \quad y = \frac{\lambda e^t}{1 + \lambda e^t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- c) $y' = t\sqrt{1-y^2}$. Les fonctions constantes $y \equiv 1$ et $y \equiv -1$ sont des solutions. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = t dt$. On intègre alors $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int t dt$ ce qui donne $\text{Arcsin } y = \frac{1}{2}t^2 + \lambda$ ou beaucoup mieux

$$y = \sin \left(\frac{1}{2}t^2 + \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2.2.

- a) Cette équation s'écrit sous forme $y' = \frac{-1}{\frac{4}{t}y}$ qui est de *type-homogène*. On pose alors $s = \frac{y}{t}$

ou $y = st$ et donc $y' = \frac{dy}{dt} = s + t \frac{ds}{dt} = \frac{-1}{4s}$, qui est équivalente à $\frac{4s}{4s^2+1} ds = -\frac{1}{t} dt$.

C'est une équation à variables séparées, qui donne en intégrant

$$\frac{1}{2} \text{Log } (4s^2 + 1) = -\text{Log } |t| + K, \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{ou bien} \quad \text{Log } (t^2 (4s^2 + 1)) = 2K,$$

ou encore

$$s = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{t^2} - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on trouve

$$y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - t^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- b) L'équation $t^2 y' = y^2$ peut s'écrire sous la forme $y' = \left(\frac{y}{t}\right)^2$. En posant $s = \frac{y}{t}$ ou $y = st$ et donc $y' = \frac{dy}{dt} = s + t \frac{ds}{dt} = s^2$, qui est équivalente à $\frac{ds}{s^2 - s} = \frac{dt}{t}$ si $s^2 - s \neq 0$. C'est une équation à variables séparées, qui donne en intégrant

$$\text{Log} \left| \frac{s-1}{s} \right| = \text{Log} |t| + K, K \in \mathbb{R} \text{ ou bien } \frac{s-1}{s} = \lambda t, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$s = \frac{1}{1 - \lambda t}.$$

Finalement, on trouve

$$y = \frac{t}{1 - \lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $s^2 - s = 0$ alors $s = 0$ ou $s = 1$ qui donne

$$\bar{y}_1 = 0.$$

Solution de l'exercice 2.3.

- a) L'équation différentielle $y' + y = \cos t$, est à coefficients constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y' + y = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = -1$ ou $\frac{dy}{y} = -dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log} |y(t)| = -t + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien

$$y_h = \lambda e^{-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il y a ensuite plusieurs méthodes pour rechercher une solution particulière. Par exemple, on peut chercher une solution particulière de l'équation $y' + y = \cos t$ sous la forme

$$y_p = a \cos t + b \sin t.$$

Alors y_p est une solution de l'équation si et seulement si

$$(-a \sin t + b \cos t) + (a \cos t + b \sin t) = \cos t, \text{ ou bien } (b + a) \cos t + (b - a) \sin t = \cos t.$$

Par identification, on trouve que a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} b + a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases},$$

ce qui donne

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Donc une solution particulière est donné par

$$y_p = \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t.$$

La solution générale de l'équation différentielle $y' + y = \cos t$ est donné par

$$y = \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t + \lambda e^{-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation différentielle $y' + 2ty = 4t$, est à coefficients non constants, avec second membre.

L'équation homogène associée est $y' + 2ty = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = -2t$ ou $\frac{dy}{y} = -2tdt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log } |y(t)| = -t^2 + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = Ce^{-t^2}$, $C \in \mathbb{R}$. On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t) e^{-t^2}$. Il vient

$$C'(t) e^{-t^2} - 2te^{-t^2} C(t) + 2tC(t) e^{-t^2} = 4t,$$

et donc $C'(t) = 4te^{t^2}$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = 2e^{t^2}.$$

La solution générale de l'équation $y' + 2ty = 4t$ est donc

$$y = \lambda e^{-t^2} + 2 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) L'équation différentielle $y' - y = te^t$, est à coefficients constants, avec second membre.

On résout d'abord l'équation sans second membre $y' - y = 0$ qui donne

$$y_h = \lambda e^t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution de l'équation $y' - y = te^t$, sous la forme

$$y_p = (at^2 + bt + c) e^t$$

Puisque dans ce cas $y'_p = (at^2 + (2a + b)t + b + c) e^t$, on trouve que y_p est solution de l'équation si et seulement si,

$$(at^2 + (2a + b)t + b + c) e^t - (at^2 + bt + c) e^t = te^t$$

ou bien

$$(2at + b) e^t = te^t.$$

Par identification, on trouve que $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. Donc la solution générale de l'équation $y' - y = te^t$ est

$$y = \left(\frac{1}{2} t^2 + \lambda \right) e^t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2.4.

- a) $ty' + y = t^2y^2$ est une équation de Bernoulli pour $m = 2$. On divise les deux membres de l'équation par y^2 ,

$$t \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = t^2.$$

On fait le changement de variables $z = \frac{1}{y}$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$. On remplace dans l'équation différentielle

$$-tz' + z = t^2,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

L'équation homogène associée est $-tz' + z = 0$ dont la solution $z = Ct, C \in \mathbb{R}$.

On utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $z = C(t)t$. Il vient

$$-t(C'(t)t + C(t)) + C(t)t = t^2,$$

et donc $C'(t) = -1$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = -t.$$

La solution générale de l'équation $-tz' + z = t^2$ est donc

$$z = \lambda t - t^2 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation différentielle $ty' + y = t^2y^2$ est alors

$$y = \frac{1}{\lambda t - t^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } y \equiv 0.$$

- b) $y' + \frac{1}{t}y = y^2 - \frac{1}{t^2}$ est une équation de Ricatti. Notons que $y_1 = \frac{1}{t}$ est solution particulière.

En posant $y = \frac{1}{t} + z$ il vient

$$z' = \frac{1}{t}z + z^2,$$

qui est une équation de Bernoulli pour $m = 2$ que l'on sait résoudre en posant $w = \frac{1}{z}$,

$$w' + \frac{1}{t}w = -1,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

L'équation homogène associée est $w' + \frac{1}{t}w = 0$ dont la solution $w = \frac{C}{t}, C \in \mathbb{R}$.

On utilise la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $w = \frac{C(t)}{t}$. Il vient

$$\left(\frac{C'(t)}{t} - \frac{1}{t^2} C(t) \right) + \frac{1}{t} \frac{C(t)}{t} = -1,$$

et donc $C'(t) = -t$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = -\frac{1}{2}t^2.$$

La solution générale de l'équation $w' + \frac{1}{t}w = -1$ est donc

$$w = \frac{K}{t} - \frac{1}{2}t, \quad K \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation différentielle $z' = \frac{1}{t}z + z^2$ est alors

$$z = \frac{2t}{2K - t^2} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = y^2 - \frac{1}{t^2}$ est

$$y = \frac{1}{t} + \frac{2t}{\lambda - t^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$