USTHB 2020-2021 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
$3^{\text{ème}}$ année LAC

Examen final - 31 mars 2021. Durée : 1 heure

Nom et Prénom :..

Matricule :..

/20

Exercice 1 (7 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $ty' = y + t^2e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{R}$, **b)** $ty' = y(y+1)$, **c)** $y'' - 3y' + 2y = 4t + e^{2t}$.

Réponse.

a) L'équation différentielle $ty' = y + t^2e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{R}$, est linéaire d'ordre 1, à coefficients non constants, avec second membre.

L'équation homogène associée est $ty' - y = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = \frac{1}{t}$ ou $\frac{dy}{y} = \frac{1}{t}dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log}\,|y(t)| = \text{Log}\,|t| + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = Ct, \quad C \in \mathbb{R}$.

On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t)\,t$. Il vient $t(C'(t)\,t + C(t)) = C(t)\,t + t^2e^{\alpha t}$, et donc $C'(t) = e^{\alpha t}$, ce qui permet, en intégrant de trouver $C(t) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$ si $\alpha \neq 0$ et $C(t) = t$ si $\alpha = 0$. Par suite une solution particulière est

$$y_p = \frac{1}{\alpha}te^{\alpha t} \text{ si } \alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad y_p = t^2 \text{ si } \alpha = 0.$$

La solution générale de l'équation $ty' = y + t^2e^{\alpha t}$ est donc

$$y = \frac{1}{\alpha}te^{\alpha t} + \lambda t \text{ si } \alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad y = t^2 + \lambda t \text{ si } \alpha = 0 \;\text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation $ty' = y(y+1)$ est à variables séparées, que l'on peut écrire

$$\frac{1}{y(y+1)}dy = \frac{dt}{t} \quad \text{ou bien} \quad \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \frac{dt}{t}.$$

En intégrant $\displaystyle\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \int \frac{dt}{t}$ on trouve $\text{Log}\,|y| - \text{Log}\,|y+1| = \text{Log}\,|t| + C$ ou beaucoup mieux

$$\text{Log}\left|\frac{y}{y+1}\right| = \text{Log}\,|\lambda t| \quad \text{où} \;\; C = \text{Log}\,|\lambda|\,.$$

Ce qui implique que

$$\frac{y}{y+1} = \lambda t,\;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, en résolvant pour y on trouve

$$y = \frac{\lambda t}{1 - \lambda t},\;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

De plus $y \equiv -1$ est une solution singulière.

c) L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, on a $r_1 = 1, r_2 = 2$. Alors la solution générale de l'équation homogène est $y = \lambda e^t + \mu e^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme 2 est racine simple du polynôme caractéristique $r^2 - 3r + 2$, cherchons une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme $y_p(t) = at + b + cte^{2t}$. On a $y_p' = a + c(2t+1)e^{2t}, y_p'' = 4c(t+1)e^{2t}$. En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$-3a + 2b + 2at + ce^{2t} = 4t + e^{2t}.$$

D'où $a = 2, b = 3$ et $c = 1$. La solution générale de l'équation non homogène est donc

$$y = 2t + 3 + \lambda e^t + (t + \mu)e^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 (7 pts.) : On se propose d'intégrer sur l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation différentielle de Riccati :

$$(E_1) : y' - \tfrac{1}{t}y + ty^2 = -\tfrac{2}{t^3}.$$

a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = t^a$ soit une solution particulière y_0 de (E_1).

b) Montrer que le changement de fonction inconnue $y(t) = y_0(t) + \dfrac{1}{z(t)}$ transforme l'équation (E_1) en une équation différentielle (E_2) linéaire du premier ordre à déterminer.

c) Résoudre l'équation différentielle (E_2) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

d) En déduire les solutions de (E_1) sur $]0,+\infty[$.

Réponse.

a) Trouvons $a \in \mathbb{R}$ tel que $y_0(t) = t^a$ soit une solution particulière. Puisque

$$y_0' - \frac{1}{t}y_0 + t(y_0)^2 = (a-1)t^{a-1} + t^{2a+1},$$

alors y_0 est solution si et seulement si $a = -2$. Donc $y_0(t) = \frac{1}{t^2}$.

b) Si z est une fonction $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas, on pose $y(t) = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{z(t)}$. Alors y est solution si et seulement si

$$-\frac{2}{t^3} - \frac{z'(t)}{(z(t))^2} - \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{z(t)}\right) + t\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{z(t)}\right)^2 = -\frac{2}{t^3}.$$

Ce qui donne

$$-\frac{z'(t)}{(z(t))^2} - \frac{1}{tz(t)} + \frac{t}{(z(t))^2} + \frac{2}{tz(t)} = 0.$$

En multipliant par $t(z(t))^2$, on obtient que y est solution de (E_1) si et seulement si z vérifie

$$(E_2) : tz' - z(t) = t^2.$$

c) L'équation différentielle (E_2) correspond à $\alpha = 0$ dans l'exercice 1 question a). Alors

$$z = t^2 + \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) On va maintenant en déduire les solutions de (E_1) définies sur $]0,+\infty[$.

Soit y une solution $\mathcal{C}^1$ définie sur $]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a nécessairement

$$y(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2 + \lambda t},$$

et donc pour tout $t > 0$ on a $t + \lambda \neq 0$ ce qui équivaut à $t \neq -\lambda$ pour tout $t > 0$. Ceci possible si $\lambda > 0$.

Donc si y est solution de (E_1), alors

$$y(t) = \frac{2t + \lambda}{t^2(t+\lambda)} \text{ avec } \lambda > 0.$$

Exercice 3 (6 pts.) : On considère l'équation différentielle $(E_3) : t^2y'' - 5ty' + 9y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

a) Déterminer une solution de l'équation (E_3) de la forme $y(t) = t^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) On pose alors $y(t) = t^\alpha z(t)$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ?

c) En déduire les solutions de (E_3) sur $]0, +\infty[$.

Réponse.

a) Soit $y(t) = t^\alpha$ une solution de (E_3). En remplaçant dans l'équation différentielle (E_3), on obtient

$$t^2\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} - 5t\alpha t^{\alpha-1} + 9t^\alpha = 0 \text{ ou bien } (\alpha-3)^2 t^\alpha = 0.$$

Si $\alpha = 3$, on a alors $t \mapsto y_0(t) = t^3$ est une solution de (E_3).

b) On pose $y(t) = t^3 z(t)$. Alors $y'(t) = 3t^2 z(t) + t^3 z'(t)$ et $y''(t) = 6tz(t) + 6t^2z'(t) + t^3z''(t)$.

En remplaçant dans l'équation différentielle (E_3), on obtient

$$t^2\left(6tz(t) + 6t^2z'(t) + t^3z''(t)\right) - 5t\left(3t^2z(t) + t^3z'(t)\right) + 9t^3z(t) = 0.$$

En simplifiant, on trouve $t^5z''(t) + t^4z'(t) = 0$. Comme $t > 0$, on en déduit l'équation différentielle vérifiée par z : $tz'' + z' = 0$.

c) En posant $u = z'$, l'équation différentielle vérifiée par z sur $]0, +\infty[$ est équivalente à $u' + \frac{1}{t}u = 0$, qui est une équation différentielle du premier ordre. Ses solutions sont $u(t) = \dfrac{\lambda}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où $z'(t) = \dfrac{\lambda}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Encore par intégration, on trouve $z(t) = \lambda \operatorname{Log} t + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors les solutions de l'équation différentielle initiale (E_3) sont

$$y(t) = t^3z(t) = \lambda t^3 \operatorname{Log} t + \mu t^3, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$