

1.4 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1.1.

- a) $y = \alpha t$: La fonction $f(t) = \alpha t$ est dérivable et $f'(t) = \alpha$. En éliminant α entre ces deux équations on trouve $f(t) = t f'(t)$. Donc l'équation différentielle vérifiée par $f(t) = \alpha t$ est $y = ty'$.
- b) $y = \alpha e^t$: La fonction $f(t) = \alpha e^t$ est dérivable et $f'(t) = \alpha e^t = f(t)$. Alors l'équation différentielle vérifiée par $f(t) = \alpha e^t$ est $y = y'$.
- c) $y = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t$: La fonction $f(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t$ contient deux constantes et elle est deux fois dérivable, et on $f'(t) = \alpha t + \beta$, $f''(t) = \alpha$. En éliminant α et β entre ces trois équations on trouve $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 f''(t) + t f'(t)$. Donc l'équation différentielle vérifiée par $f(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t$ est $-\frac{1}{2}t^2 y'' + t y' = y$.

Solution de l'exercice 1.2.

- a) $y' + y - t = 0$: linéaire d'ordre 1. b) $y'' - y' = 2y$: linéaire d'ordre 2.
- c) $y''' + ty - 2y = \sin t$: linéaire d'ordre 3. d) $(2 - y)y' + y = \ln t$: non linéaire d'ordre 1.
- e) $y'' + \sin y = 1$: non linéaire d'ordre 2. f) $y^{(5)} + y^2 = t$: non linéaire d'ordre 5.

Solution de l'exercice 1.3.

La fonction $f(t) = 2t + \lambda e^t$ est dérivable et $f'(t) = 2 + \lambda e^t$. Ainsi

$$f'(t) - f(t) = 2 + \lambda e^t - (2t + \lambda e^t) = 2(1 - t).$$

Donc $y = 2t + \lambda e^t$ est bien solution de l'équation différentielle $y' - y = 2(1 - t)$.

Si $t = 0$ on a $y = 3 = 0 + \lambda e^0$, d'où $\lambda = 3$. Alors la solution particulière dont la courbe intégrale passe par le point $t = 0, y = 3$ est

$$y = 2t + 3e^t.$$