2.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 2.1.

a) $y' = y^\alpha$ ou $\dfrac{dy}{dt} = y^\alpha$. La fonction nulle lorsque $\alpha \geq 0$ est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\dfrac{dy}{y^\alpha} = dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient

$$\alpha = 1 : \quad \text{Log}\,|y(t)| = t + K, \text{ avec } K \in \mathbb{R}, \text{ ou bien } y = Ce^t, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\alpha \neq 1 : \quad \tfrac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t + K, \text{ avec } K \in \mathbb{R}, \text{ ou bien } y = ((1-\alpha)\,t + C)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) $y' = (1-y)\,y$, ou $\dfrac{dy}{dt} = (1-y)\,y$, que l'on peut écrire $\dfrac{dy}{(1-y)\,y} = dt$ ou $\dfrac{dy}{1-y} + \dfrac{dy}{y} = dt$. En intégrant $\displaystyle\int \frac{dy}{1-y} + \int \frac{dy}{y} = \int dt$ on trouve $-\text{Log}\,|1-y| + \text{Log}\,|y| = t + C$ ou beaucoup mieux

$$\text{Log}\left|\frac{y}{1-y}\right| = t + C.$$

Finalement, on trouve les courbes intégrales

$$\frac{y}{1-y} = \lambda e^t, \ \lambda = \pm e^C \in \mathbb{R} \ \text{ ou bien } \quad y = \frac{\lambda e^t}{1 + \lambda e^t}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) $y' = t\sqrt{1-y^2}$. Les fonctions constantes $y \equiv 1$ et $y \equiv -1$ sont des solutions. Les autres s'obtiennent en écrivant $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = tdt$. On intègre alors $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int tdt$ ce qui donne $\text{Arcsin}\, y = \frac{1}{2}t^2 + \lambda$ ou beaucoup mieux

$$y = \sin\left(\frac{1}{2}t^2 + \lambda\right), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2.2.

a) Cette équation s'écrit sous forme $y' = \frac{-1}{4\frac{y}{t}}$ qui est de *type-homogène*. On pose alors $s = \frac{y}{t}$ ou $y = st$ et donc $y' = \frac{dy}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} = \dfrac{-1}{4s}$, qui est équivalente à $\dfrac{4s}{4s^2+1}ds = -\dfrac{1}{t}dt$. C'est une équation à variables séparées, qui donne en intégrant

$$\frac{1}{2}\,\text{Log}\left(4s^2+1\right) = -\,\text{Log}\,|t| + K, K \in \mathbb{R} \text{ ou bien } \text{Log}\left(t^2\left(4s^2+1\right)\right) = 2K,$$

ou encore

$$s = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda^2}{t^2} - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on trouve

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - t^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation $t^2y' = y^2$ peut s'écrire sous la forme $y' = \left(\frac{y}{t}\right)^2$. En posant $s = \frac{y}{t}$ ou $y = st$ et donc $y' = \frac{dy}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} = s^2$, qui est équivalente à $\frac{ds}{s^2 - s} = \frac{dt}{t}$ si $s^2 - s \neq 0$. C'est une équation à variables séparées, qui donne en intégrant

$$\mathrm{Log}\left|\frac{s-1}{s}\right| = \mathrm{Log}\,|t| + K, K \in \mathbb{R} \text{ ou bien } \frac{s-1}{s} = \lambda t, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$s = \frac{1}{1 - \lambda t}.$$

Finalement, on trouve

$$y = \frac{t}{1 - \lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $s^2 - s = 0$ alors $s = 0$ ou $s = 1$ qui donne

$$\bar{y}_1 = 0.$$

Solution de l'exercice 2.3.

a) L'équation différentielle $y' + y = \cos t$, est à coefficients constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y' + y = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = -1$ ou $\frac{dy}{y} = -dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\mathrm{Log}\,|y(t)| = -t + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien

$$y_h = \lambda e^{-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il y a ensuite plusieurs méthodes pour rechercher une solution particulière. Par exemple, on peut chercher une solution particulière de l'équation $y' + y = \cos t$ sous la forme

$$y_p = a\cos t + b\sin t.$$

Alors y_p est une solution de l'équation si et seulement si

$$(-a\sin t + b\cos t) + (a\cos t + b\sin t) = \cos t, \text{ ou bien } \quad (b+a)\cos t + (b-a)\sin t = \cos t.$$

Par identification, on trouve que a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} b + a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases},$$

ce qui donne

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Donc une solution particulière est donné par

$$y_p = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

La solution générale de l'équation différentielle $y' + y = \cos t$ est donné par

$$y = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \lambda e^{-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation différentielle $y'+2ty = 4t$, est à coefficients non constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y' + 2ty = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = -2t$ ou $\frac{dy}{y} = -2tdt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log}\,|y(t)| = -t^2+K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = Ce^{-t^2}, \; C \in \mathbb{R}$. On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t)\; e^{-t^2}$. Il vient

$$C'(t)\; e^{-t^2} - 2te^{-t^2}C(t) + 2tC(t)\; e^{-t^2} = 4t,$$

et donc $C'(t) = 4te^{t^2}$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = 2e^{t^2}.$$

La solution générale de l'équation $y' + 2ty = 4t$ est donc

$$y = \lambda e^{-t^2} + 2 \;\text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) L'équation différentielle $y' - y = te^t$, est à coefficients constants, avec second membre. On résout d'abord l'équation sans second membre $y' - y = 0$ qui donne

$$y_h = \lambda e^t \;\text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution de l'équation $y' - y = te^t$, sous la forme

$$y_p = \left(at^2 + bt + c\right) e^t$$

Puisque dans ce cas $y_p' = \left(at^2 + (2a+b)\,t + b + c\right) e^t$, on trouve que y_p est solution de l'équation si et seulement si,

$$\left(at^2 + (2a+b)\,t + b + c\right) e^t - \left(at^2 + bt + c\right) e^t = te^t$$

ou bien

$$(2at + b)\, e^t = te^t.$$

Par identification, on trouve que $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. Donc la solution générale de l'équation $y' - y = te^t$ est

$$y = \left(\frac{1}{2}t^2 + \lambda\right) e^t \;\text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2.4.

a) $ty' + y = t^2y^2$ est une équation de Bernoulli pour $m = 2$. On divise les deux membres de l'équation par y^2,

$$t\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = t^2.$$

On fait le changement de variables $z = \frac{1}{y}$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$. On remplace dans l'équation différentielle

$$-tz' + z = t^2,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

L'équation homogène associée est $-tz' + z = 0$ dont la solution $z = Ct, C \in \mathbb{R}$.

On utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $z = C(t)\ t$. Il vient

$$-t\left(C'(t)\ t + C(t)\right) + C(t)\ t = t^2,$$

et donc $C'(t) = -1$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = -t.$$

La solution générale de l'équation $-tz' + z = t^2$ est donc

$$z = \lambda t - t^2 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation différentielle $ty' + y = t^2y^2$ est alors

$$y = \frac{1}{\lambda t - t^2} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } y \equiv 0.$$

b) $y' + \frac{1}{t}y = y^2 - \frac{1}{t^2}$ est une équation de Ricatti. Notons que $y_1 = \frac{1}{t}$ est solution particulière. En posant $y = \frac{1}{t} + z$ il vient

$$z' = \frac{1}{t}z + z^2,$$

qui est une équation de Bernoulli pour $m = 2$ que l'on sait résoudre en posant $w = \frac{1}{z}$,

$$w' + \frac{1}{t}w = -1,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

L'équation homogène associée est $w' + \frac{1}{t}w == 0$ dont la solution $w = \frac{C}{t}, C \in \mathbb{R}$.

On utilise la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $w = \dfrac{C(t)}{t}$. Il vient

$$\left(\frac{C'(t)}{t} - \frac{1}{t^2}C(t)\right) + \frac{1}{t}\frac{C(t)}{t} = -1,$$

et donc $C'(t) = -t$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = -\frac{1}{2}t^2.$$

La solution générale de l'équation $w' + \dfrac{1}{t}w = -1$ est donc

$$w = \frac{K}{t} - \frac{1}{2}t, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation différentielle $z' = \dfrac{1}{t}z + z^2$ est alors

$$z = \frac{2t}{2K - t^2} \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = y^2 - \frac{1}{t^2}$ est

$$y = \frac{1}{t} + \frac{2t}{\lambda - t^2},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$