

3.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 3.1.

a) L'équation différentielle $y'' + y' = t + 2$ est incomplète en y .

Posons donc $v = y'$ et remplaçons dans notre équation, on obtient

$$v' + v = t + 2,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, avec second membre.

On résout d'abord l'équation sans second membre $v' + v = 0$ qui donne

$$v_h = \lambda e^{-t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution de l'équation $v' + v = t + 2$, sous la forme

$$v_p = at + b$$

Puisque dans ce cas $v'_p = a$, on trouve que v_p est solution de l'équation si et seulement si,

$$a + at + b = t + 2.$$

Par identification, on trouve que

$$a = 1 \text{ et } b = 1.$$

Donc la solution générale de l'équation $v' + v = t + 2$ est

$$v = t + 1 + \lambda e^{-t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} y &= \int v dt = \int (t + 1 + \lambda e^{-t}) dt \\ &= t + \frac{1}{2}t^2 - \lambda e^{-t} + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) L'équation différentielle $ty'' = y' + t^2$ est aussi incomplète en y .

Posons $v = y'$ et remplaçons dans notre équation, on obtient

$$tv' = v + t^2,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants, avec second membre.

On résout l'équation sans second membre $tv' = v$ qui donne

$$v_h = \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution de l'équation $tv' = v + t^2$.

On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $v = \lambda(t) t$. Il vient

$$t (\lambda'(t) t + \lambda(t)) = \lambda(t) t + t^2,$$

et donc

$$\lambda'(t) = 1,$$

ce qui permet, en intégrant de trouver

$$\lambda(t) = t.$$

D'où

$$v_p = t t = t^2$$

La solution générale de l'équation $tv' = v + t^2$ est donc

$$v = t^2 + \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} y &= \int v dt = \int (t^2 + \lambda t) dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}\lambda t^2 + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) L'équation différentielle $y^2 y'' + y' = 0$ est incomplète en t .

La méthode pour résoudre cette équation différentielle consiste à prendre y comme nouvelle variable et $v = y'$ comme variable fonction inconnue en la variable y , c'est-à-dire

$$v : y \mapsto v(y) = y'.$$

On a donc

$$y'' = \frac{d}{dt} y' = \frac{d}{dt} v(y) = \frac{dy}{dt} \frac{dv}{dy} = y' \frac{dv}{dy} = v \frac{dv}{dy}.$$

Donc l'équation différentielle $y^2 y'' + y' = 0$ devient

$$y^2 v \frac{dv}{dy} + v = 0.$$

Si $v = 0$ alors $y' = 0$ et donc $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des solutions.

Si $v \neq 0$, on obtient

$$y^2 \frac{dv}{dy} + 1 = 0$$

ou bien

$$dv = -\frac{dy}{y^2}$$

qui est une équation à variables séparées de fonction inconnue $v(y)$.

En intégrant $\int dv = \int -\frac{dy}{y^2}$ on trouve

$$v = \frac{1}{y} + \lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on résout l'équation $y' = v$ *i.e.*

$$y' = \frac{1}{y} + \lambda,$$

qui est une équation à variables séparées

$$\left(\frac{y}{1 + \lambda y} \right) dy = dt$$

ou beaucoup mieux

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda(\lambda y + 1)} \right) dy = dt$$

Par intégration on trouve les courbes intégrales

$$\lambda y - \text{Log} |\lambda y + 1| = \lambda^2 (t + \mu) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 3.2.

L'équation différentielle $tyy'' - t(y')^2 - yy' = 3t^2y^2$ peut s'écrire sous la forme

$$t \frac{y''}{y} - t \left(\frac{y'}{y} \right)^2 - \frac{y'}{y} = 3t^2,$$

qui est de type-homogène du second ordre.

La résolution de ces équations se fait en effectuant un changement de fonction inconnue en posant

$$u(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} \quad \text{ou } y' = u y,$$

et donc

$$y'' = (u y)' = y' u + y u'.$$

D'où

$$\frac{y''}{y} = \frac{y'}{y} u + u' = u^2 + u'.$$

Et donc l'équation $t \frac{y''}{y} - t \left(\frac{y'}{y} \right)^2 - \frac{y'}{y} = 3t^2$ devient

$$u' - \frac{1}{t} u = 3t,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, avec second membre.

La solution de l'équation sans second membre $u' - \frac{1}{t} u = 0$ est

$$y_h = \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution de l'équation $u' - \frac{1}{t} u = 3t$.

On utilise la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = \lambda(t) t$. Il vient

$$\lambda'(t) t + \lambda(t) - \frac{1}{t} \lambda(t) t = 3t,$$

et donc

$$\lambda'(t) = 3,$$

ce qui permet, en intégrant de trouver

$$\lambda(t) = 3t.$$

D'où

$$u_p = 3t t = 3t^2.$$

La solution générale de l'équation $u' - \frac{1}{t} u = 3t$ est donc

$$u = 3t^2 + \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il vient alors

$$\frac{y'}{y} = 3t^2 + \lambda t,$$

qui est une équation différentielle du premier ordre ayant pour solution générale

$$y = \mu e^{t^3 + \lambda t^2}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 3.3.

Les équations différentielles en question sont linéaires d'ordre 2, à coefficients constants, avec second membre.

a) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{4t}$.

L'équation homogène associée est

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

dont les racines sont

$$r_1 = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = 3.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$r_1 = 2 \neq 4 \quad \text{et} \quad r_2 = 3 \neq 4,$$

cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p = \alpha e^{4t}.$$

On a

$$y_p'(t) = 4\alpha e^{4t} \text{ et } y_p''(t) = 16\alpha e^{4t}.$$

Alors

$$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = 16\alpha e^{4t} - 20\alpha e^{4t} + 6\alpha e^{4t} = 2\alpha e^{4t}.$$

Par identification, on trouve

$$\alpha = 1,$$

D'où

$$y_p = e^{4t}$$

Les solutions de l'équation non homogène sont donc

$$y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} + e^{4t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) $y'' - y' + y = 5.$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = \alpha.$$

On a donc

$$y_p'' - y_p' + y_p = 0 - 0 + \alpha = \alpha.$$

D'où

$$y_p = 5.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - y' + y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 - r + 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$y_h = \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) e^{\frac{1}{2}t} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est

$$y = 5 + \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) e^{\frac{1}{2}t} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

c) $y'' + y' - 2y = t + \cos t.$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = \alpha t + \beta + \gamma \cos t + \delta \sin t.$$

En dérivant, on trouve

$$y_p' = \alpha - \gamma \sin t + \delta \cos t \quad \text{et} \quad y_p'' = -\gamma \cos t - \delta \sin t.$$

On a donc

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p' - 2y_p &= -\gamma \cos t - \delta \sin t + \alpha - \gamma \sin t + \delta \cos t - 2\alpha t - 2\beta - 2\gamma \cos t - 2\delta \sin t \\ &= (\delta - 3\gamma) \cos t - (\gamma + 3\delta) \sin t - 2\alpha t + \alpha - 2\beta. \end{aligned}$$

Par identification, on cherche α, β, γ et δ satisfaisant le système

$$\begin{cases} \delta - 3\gamma = 1 \\ \gamma + 3\delta = 0 \\ -2\alpha = 1 \\ \alpha - 2\beta = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{3}{10}.$$

D'où

$$y_p = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \cos t - \frac{3}{10} \sin t.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 + r - 2 = 0,$$

dont les racines sont

$$r_1 = -2 \quad \text{et} \quad r_2 = 1.$$

Les solutions de l'équation homogène sont alors les fonctions

$$y_h = \lambda e^{-2} + \mu e^t \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation non-homogène sont

$$y = y_h + y_p = \lambda e^{-2} + \mu e^t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \cos t - \frac{3}{10} \sin t \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 3.4.

Résolution de l'équation différentielle : $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$.

L'équation homogène associée est

$$y'' + y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 + 1 = 0$$

dont les racines sont

$$r_1 = i \quad \text{et} \quad r_2 = -i.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y_h = \lambda \cos t + \mu \sin t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On utilise la méthode de variation des constantes, c'est-à-dire, on cherche la solution générale de l'équation non homogène sous la forme

$$y(t) = \lambda(t) \cos t + \mu(t) \sin t.$$

Les dérivées λ' et μ' doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \\ \lambda' y'_1 + \mu' y'_2 = c(t), \end{cases} \quad \text{avec } y_1 = \cos t, \quad y_2 = \sin t \quad \text{et} \quad c(t) = \frac{1}{\cos t}.$$

Il vient alors

$$\begin{cases} \lambda' \cos t + \mu' \sin t = 0, \\ -\lambda' \sin t + \mu' \cos t = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\lambda' = -\frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{et} \quad \mu' = 1.$$

et par intégration on obtient

$$\lambda(t) = \text{Log}(|\cos t|) + \alpha, \quad \mu(t) = t + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière de l'équation non homogène est donc

$$y_p = \cos t \text{Log}(|\cos t|) + t \sin t$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène est

$$y = y_h + y_p = \lambda \cos t + \mu \sin t + \cos t \text{Log}(|\cos t|) + t \sin t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$