USTHB 2020-2021 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
3ème année LAC

Test n°1 - 09 mars 2021. Durée : 30 minutes

Nom et Prénom :..

Matricule :..

/15

Exercice 1 (7 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - 2ty = t$,   **b)** $t(y+2)y' = y$,   **c)** $y' + y = t^2 + e^t$.

Réponse.

a) L'équation différentielle $y' - 2ty = t$, est linéaire d'ordre 1, à coefficients non constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y' - 2ty = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = 2t$ ou $\frac{dy}{y} = 2tdt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log}\,|y(t)| = t^2 + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = Ce^{t^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t)\,e^{t^2}$. Il vient $C'(t)\,e^{t^2} + 2te^{t^2}C(t) - 2tC(t)\,e^{t^2} = t$, et donc $C'(t) = te^{-t^2}$, ce qui permet, en intégrant de trouver $C(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$.

La solution générale de l'équation $y' - 2ty = t$ est donc

$$y = -\tfrac{1}{2} + \lambda e^{t^2} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation $t(y+2)y' = y$, est à variables séparées, que l'on peut écrire $\dfrac{y+2}{y}dy = \dfrac{dt}{t}$.

En intégrant $\displaystyle\int \frac{y+2}{y}dy = \int \frac{dt}{t}$ on trouve $y + 2\,\text{Log}\,|y| = \text{Log}\,|t| + C$ ou beaucoup mieux

$$\text{Log}\left|y^2e^y\right| = \text{Log}\,|\lambda t| \quad \text{où} \quad C = \text{Log}\,|\lambda|\,.$$

Finalement, on trouve les courbes intégrales

$$y^2e^y = \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) L'équation différentielle $y' + y = t^2 + e^t$, est linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y' + y = 0$ dont la solution générale est λe^{-t}.

On cherche une solution particulière sous la forme, $y_p = \alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta e^t$.

On remplace dans l'équation : $2\alpha t + \beta + \delta e^t + \alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta e^t = t^2 + e^t$.

En identifiant, on trouve alors $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 2$ et $\delta = \frac{1}{2}$.

Une solution particulière est donc $y_p = t^2 - 2t + 2 + \frac{1}{2}e^t$.

D'où la solution générale est

$$y = t^2 - 2t + 2 + \frac{1}{2}e^t + \lambda e^{-t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 (6 pts.) : On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 4y = te^t \qquad (E)$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2) Trouver une solution particulière de (E), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

3) Déterminer l'unique solution y de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.

Réponse.

1) Le polynôme caractéristique associé à (E) est : $p(x) = r^2 + 2r + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$y = e^{-t}\left(\lambda \cos\left(\sqrt{3}t\right) + \mu \sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2) Le second membre est de la forme $e^{at}Q(t)$ avec $a = 1$ et $Q(t) = t$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(t) = R(t)e^t$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$. On pose donc $R(t) = \alpha t + \beta$. On a

$$y_p'(t) = (\alpha t + \alpha + \beta)\, e^t, \quad y_p''(t) = (\alpha t + 2\alpha + \beta)\, e^t.$$

Alors

$$y_p''(t) + 2y_p'(t) + 4y_p(t) = (7\alpha t + 4\alpha + 7\beta)\, e^t.$$

Donc y_p est solution si et seulement si $7\alpha t + 4\alpha + 7\beta = t$. On trouve après identification des coefficients :

$$\alpha = \frac{1}{7} \qquad et \qquad \beta = \frac{-4}{49}.$$

La fonction $y_p(t) = \left(\frac{1}{7}t - \frac{4}{49}\right) e^t$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$y(x) = \left(\frac{1}{7}t - \frac{4}{49}\right) e^t + e^{-t}\left(\lambda \cos\left(\sqrt{3}t\right) + \mu \sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3) Soit y une solution de E. Les conditions $y(0) = 1$, $y(1) = 0$ sont réalisées ssi

$$\lambda = \frac{53}{49} \qquad \text{et} \qquad \mu = -\frac{53\cos\sqrt{3} + 3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$