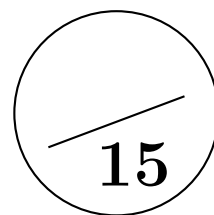




Test n°1 - 09 mars 2021. Durée : 30 minutes

Nom et Prénom :

Matricule :



Exercice 1 (7 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - 2ty = t$, b) $t(y + 2)y' = y$, c) $y' + y = t^2 + e^t$.

Réponse.

a) L'équation différentielle $y' - 2ty = t$, est linéaire d'ordre 1, à coefficients non constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y' - 2ty = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = 2t$ ou $\frac{dy}{y} = 2tdt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log } |y(t)| = t^2 + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = Ce^{t^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t)e^{t^2}$. Il vient $C'(t)e^{t^2} + 2te^{t^2}C(t) - 2tC(t)e^{t^2} = t$, et donc $C'(t) = te^{-t^2}$, ce qui permet, en intégrant de trouver $C(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$.

La solution générale de l'équation $y' - 2ty = t$ est donc

$$y = -\frac{1}{2} + \lambda e^{t^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation $t(y + 2)y' = y$, est à variables séparées, que l'on peut écrire $\frac{y+2}{y}dy = \frac{dt}{t}$.

En intégrant $\int \frac{y+2}{y}dy = \int \frac{dt}{t}$ on trouve $y + 2\text{Log } |y| = \text{Log } |t| + C$ ou beaucoup mieux $\text{Log } |y^2 e^y| = \text{Log } |\lambda t|$ où $C = \text{Log } |\lambda|$.

Finalement, on trouve les courbes intégrales

$$y^2 e^y = \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) L'équation différentielle $y' + y = t^2 + e^t$, est linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y' + y = 0$ dont la solution générale est λe^{-t} .

On cherche une solution particulière sous la forme, $y_p = \alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta e^t$.

On remplace dans l'équation : $2\alpha t + \beta + \delta e^t + \alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta e^t = t^2 + e^t$.

En identifiant, on trouve alors $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 2$ et $\delta = \frac{1}{2}$.

Une solution particulière est donc $y_p = t^2 - 2t + 2 + \frac{1}{2}e^t$.

D'où la solution générale est

$$y = t^2 - 2t + 2 + \frac{1}{2}e^t + \lambda e^{-t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 (6 pts.) : On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 4y = te^t \quad (E)$$

- 1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
- 2) Trouver une solution particulière de (E), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
- 3) Déterminer l'unique solution y de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.

Réponse.

- 1) Le polynôme caractéristique associé à (E) est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$y = e^{-t} \left(\lambda \cos(\sqrt{3}t) + \mu \sin(\sqrt{3}t) \right) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- 2) Le second membre est de la forme $e^{at}Q(t)$ avec $a = 1$ et $Q(t) = t$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(t) = R(t)e^t$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$. On pose donc $R(t) = \alpha t + \beta$. On a

$$y_p'(t) = (\alpha t + \alpha + \beta) e^t, \quad y_p''(t) = (\alpha t + 2\alpha + \beta) e^t.$$

Alors

$$y_p''(t) + 2y_p'(t) + 4y_p(t) = (7\alpha t + 4\alpha + 7\beta) e^t.$$

Donc y_p est solution si et seulement si $7\alpha t + 4\alpha + 7\beta = t$. On trouve après identification des coefficients :

$$\alpha = \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-4}{49}.$$

La fonction $y_p(t) = \left(\frac{1}{7}t - \frac{4}{49}\right) e^t$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$y(x) = \left(\frac{1}{7}t - \frac{4}{49}\right) e^t + e^{-t} \left(\lambda \cos(\sqrt{3}t) + \mu \sin(\sqrt{3}t) \right) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- 3) Soit y une solution de E . Les conditions $y(0) = 1$, $y(1) = 0$ sont réalisées ssi

$$\lambda = \frac{53}{49} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{53 \cos \sqrt{3} + 3e^2}{49 \sin \sqrt{3}}.$$