Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

Sommaire

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques définitions essentielles pour la suite de ce cours.

1.1 Notion d'équation différentielle

1.1.1 Différents types d'équations différentielles

Définition 1 (Équation différentielle ordinaire)

On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) une relation entre une variable réelle indépendante t, une fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ et ses dérivées $y', y'', \cdots, y^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*$.

L'ordre d'une EDO est défini comme étant l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation. Ainsi, une équation différentielle d'ordre n se présente sous la forme

$$F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

La fonction F est une fonction de $n+2$ variables.

La fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ de la variable réelle t est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^k, k = 2, 3, \cdots$.

On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).

Exemple 1

a) $y' + ty = e^t$ est une équation différentielle du premier ordre.

b) $y'' + 4ty = 0$ est une équation différentielle du second ordre.

c) $y^{(9)} - ty'' = t^2$ est une équation différentielle d'ordre 9. ▪

Définition 2 (Équation différentielle normale)

Si l'équation $F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ est résoluble par rapport à $y^{(n)}$, alors l'EDO prend sa forme *normale* ou *résolue*

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right).$$

Exemple 2

La forme normale d'une équation différentielle du premier ordre ($n = 1$), $F(t, y, y') = 0$ s'écrit $y' = f(t, y)$. Par exemple, $y' = ty^2 + e^t$. ▪

Remarque 3

Dans le cas où une équation différentielle n'est pas résoluble par rapport à $y^{(n)}$, elle est dite *implicite*.

Exemple 3

L'équation différentielle $y' + e^{y'} = y + t$ ne peut pas se mettre sous forme résolue. ▪

Définition 4 (Équation différentielle autonome)
Une équation différentielle *autonome* est un cas particulier important des équations différentielles où la variable t n'apparaît pas dans l'équation. C'est une équation de la forme

$$F\left(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Il s'agit du cas où la fonction F ne dépend pas explicitement de t.

Exemple 4

L'équation $y' = f(y) = y^2 + e^y$ est une équation différentielle autonome du premier ordre. ∎

1.1.2 Équations différentielles linéaires

Donnons maintenant une classification par linéarité.

Définition 5 (Équation différentielle linéaire)
On appelle équation différentielle *linéaire* toute équation de la forme :

$$a_n(t)\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)\, y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = g(t),$$

où les fonctions $t \mapsto a_j(t), 0 \leq j \leq n$, sont appelées coefficients de l'équation.
La fonction $t \mapsto g(t)$ est appelée le second membre. Si g est nulle, alors l'équation est dite *homogène* ou sans second membre.
L'équation différentielle

$$a_n(t)\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)\, y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0,$$

est appelée équation différentielle homogène associée.
Si $a_j(t), 0 \leq j \leq n$, sont des constantes, on parle d'équation différentielle linéaire à *coefficients constants.*

Exemple 5

L'équation différentielle $(t^2+1)\, y'' = e^t y + \operatorname{Arctg} t$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et son équation différentielle homogène associée est $(t^2+1)\, y'' = e^t y$. ∎

Exemple 6

Les équations différentielles suivantes ne sont pas linéaires.

a) $y' + y^2 - t = 0$ **b)** $y'' - e^y y' = 2y$ **c)** $y''' + tyy' - 2y = \sin t$

d) $(2-y)\, y' + y = \ln t$ **e)** $y'' + \sin y = 1$ **f)** $y^{(5)} + y^2 y' = t.$ ∎

1.2 Notions de solutions

1.2.1 Solution d'une équation différentielle

Définition 6 (Solution d'une équation différentielle)
On appelle *solution* (ou intégrale) de l'équation différentielle $F\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ un couple (I, y), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une fonction n fois dérivable définie sur I telle que pour tout t de I, on ait

$$F\left(t, y\left(t\right), y'\left(t\right), y''\left(t\right), \cdots, y^{(n)}\left(t\right)\right) = 0.$$

Résolution d'une équation différentielle

Résoudre ou intégrer une équation différentielle consiste à rechercher :

- un intervalle I de $\mathbb{R}$,
- une fonction y suffisamment dérivable et vérifiant l'équation différentielle sur I.

Exemple 7
L'équation $y' - y = 0$ admet $(I, y) = ([0, 1], \exp)$ comme solution, mais aussi $(I, y) = (\mathbb{R}, \exp)$. La première est la restriction de la seconde. ∎

1.2.2 Conditions initiales

Définition 7 (Conditions initiales)
On peut aussi rechercher des solutions qui vérifient certaines conditions en un point t_0 : $y\left(t_0\right) = y_0,\ y'\left(t_0\right) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_{n-1}$.
On appelle ce type de condition des *conditions initiales*.

Exemple 8
La fonction $t \mapsto y\left(t\right) = \operatorname{tg} t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y^2 = 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifie la condition initiale $y\left(0\right) = 0$. ∎

Exemple 9
La fonction $t \mapsto y\left(t\right) = \operatorname{Ch} t$ est solution de l'équation différentielle $\left(y'\right)^2 - y^2 = -1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale $y\left(0\right) = 1$. ∎

1.2.3 Problème de Cauchy

Définition 8 (Problème de Cauchy)
On appelle problème de *Cauchy* la donnée d'une équation différentielle résolue d'ordre n,

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

et de n conditions initiales

$$y\left(t_0\right) = y_0,\ y'\left(t_0\right) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_{n-1}.$$

On verra plus tard que dans un cadre assez fréquent, les problèmes de Cauchy admettent en général une unique solution définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1.2.4 Courbes intégrales d'une équation différentielle

Définition 9 (Courbes intégrales)
Les courbes représentatives des solutions maximales d'une équation différentielle sont appelées *courbes intégrales.*

Exemple 10
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ty' - y = 0$ est donné par l'ensemble des fonctions de la forme $y = \lambda t$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, les courbes intégrales de cette équation sont des droites qui passent par l'origine, sauf l'axe des y. ∎

Exemple 11
L'équation différentielle $y'' = 0$ admet pour courbes intégrales les droites d'équation $y = at + b$, c'est-à-dire l'ensemble des droites du plan non parallèles à l'axe Oy. ∎

Plus généralement la résolution d'une équation différentielle consiste à déterminer ses courbes intégrales, soit par une équation $y = f(t)$, soit par $\varphi(t, y) = 0$, soit même géométriquement.