Chapitre 4

Théorie des équations différentielles

Il arrive qu'on ne recherche pas toutes les solutions d'une EDO mais seulement celles qui vérifient certaines conditions, dites conditions initiales de Cauchy ou tout simplement conditions de Cauchy.

On considère le problème de Cauchy, ou problème à valeur initiale

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec t, $t_0 \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $y(t)$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue.

Définition 15

On dit que la fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ est solution de (4.1) si $y \in \mathcal{C}^1(I,\, \mathbb{R}^n)$, $y(t_0) = y_0$ et $\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

Définition 16

La fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne en y s'il existe une constante L, appelée la constante de Lipschitz de f, telle que :

$$\forall t \in I, \forall\, y,\ z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, y) - f(t,\ z)\| \leq L \|y - z\|.$$

Le théorème fondamental de ce chapitre est le suivant.

Théorème 17 Cauchy - Lispchitz - f lipschitzienne
Soit la fonction f, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, continue sur $[t_0,\ t_0+a]\times\mathbb{R}^n$ et lipschitzienne par rapport à y. Alors, pour tout $y_0\in\mathbb{R}^n$ il existe une unique fonction $y\in\mathcal{C}^1\left([t_0,\ t_0+a],\mathbb{R}^n\right)$ qui vérifie

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)), \forall t\in[t_0,t_0+a] \\ y(t_0)=y_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

4.1 Exercices

Exercice 4.1

Soit $a\in\,]0,1[$. On considère le problème de Cauchy (P_1) : $\begin{cases} y'=|y|^a \\ y(0)=0 \end{cases}$.

a) Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(t)=\begin{cases} ((1-a)\,t)^{\frac{1}{1-a}} & \text{si } t\geq 0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy (P_1).

b) Conclure.

Exercice 4.2

On considère l'équation différentielle $y'=t+y^2$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale sur $]a,b[$ qui vérifie $y(0)=0$.

b) Montrer que b est finie ($b<+\infty$).

c) On accepte que $\lim\limits_{t\to b^-}\int_\alpha^t y^2(s)\,ds=+\infty$, $\alpha>a$. En déduire que $\lim\limits_{t\to b^-}y(t)=+\infty$.

Exercice 4.3

On considère l'équation différentielle $y'=1+ty^3$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale qui vérifie $y(0)=0$.

b) Montrer que y est une fonction impaire.

c) Étudier le signe et la monotonie de y.

4.2 Solution des exercices

Solution de l'exercice 4.1.

a) Si $a \in]0,1[$, alors $\frac{1}{1-a} > 1$. On a donc pour $t = 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{((1-a)t)^{\frac{1}{1-a}} - 0}{t - 0} = 0 \text{ et } \lim_{t\to 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{0 - 0}{t - 0} = 0.$$

La fonction y est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$y'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} ((1-a)t)^{\frac{a}{1-a}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{array} \right| = |y(t)|^a.$$

Il vient que $y(t) = \begin{cases} ((1-a)t)^{\frac{1}{1-a}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est solution du problème de Cauchy (P_1).

b) On remarque que la fonction identiquement nulle $y \equiv 0$ est une autre solution de notre problème.

Non unicité de la solution vient du fait que la fonction $f(t, y) = |y|^a$ n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $y = 0$.

Solution de l'exercice 4.2.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = t + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites (continuité en t et lipschitziennité locale en y).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.

b) Si $b = +\infty$, alors pour $t \geq 1$, $y'(t) \geq 1 + y^2(t)$ et donc

$$\frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} \geq 1.$$

En intégrant,

$$\int_1^t \frac{y'(s)}{1 + y^2(s)} ds \geq \int_1^t ds,$$

on obtient

$$\operatorname{Arctg}(y(t)) - \operatorname{Arctg}(y(1)) \geq t - 1.$$

Ce qui est absurde car la fonction Arctg est bornée.

c) Pour $t \geq \alpha$ on a

$$\int_\alpha^t y'(s)\,ds = \int_\alpha^t \left(s + y^2(s)\right) ds,$$

ce qui implique

$$y(t) = y(\alpha) + \frac{t^2 - \alpha^2}{2} + \int_\alpha^t y^2(s)\,ds$$

et donc

$$\lim_{t \to b^-} y(t) = y(\alpha) + \frac{b^2 - \alpha^2}{2} + \lim_{t \to b^-} \int_\alpha^t y^2(s)\,ds.$$

Comme $\lim\limits_{t \to b^-} \int_\alpha^t y^2(s)\,ds = +\infty$, alors $\lim\limits_{t \to b^-} y(t) = +\infty$.

Solution de l'exercice 4.3.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = 1 + ty^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites (continuité en t et lipschitziennité locale en y).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.

b) Considérons la fonction définie sur $]-b, -a[$ par $z(t) = -y(-t)$.

On a

$$z'(t) = (-y(-t))' = y'(-t) = 1 + (-t)(y(-t))^3 = 1 + t(z(t))^3$$

et

$$z(0) = -y(-0) = 0.$$

On observe que z est solution du problème de Cauchy posé et est donc restriction de la solution maximale y. On en déduit $]-b, -a[\subset]a, b[$ donc $a = -b$ et

$$y(t) = z(t) = -y(-t) \quad \text{sur} \quad]-b, b[\,.$$

Ceci montre que y est une fonction impaire.

c) On a $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0$, la solution y est donc strictement positive sur un intervalle $]0, t_0[$. Si $t_0 < b$ avec $y(t_0) = 0$, alors d'après le théorème des accroissements finies, il existe $c \in]0, t_0[$ tel que

$$y'(c) = 1 + c(y(c))^3 = 0$$

et donc

$$y(c) = -\frac{1}{\sqrt[3]{c}} < 0.$$

Ceci contredit le fait que la fonction y est strictement positive sur $]0, t_0[$.

Alors, la solution y est strictement positive sur $]0, b[$. Comme elle est impaire, donc elle est strictement négative sur $]-b, 0[$. On en déduit que

$$y'(t) = 1 + t\,(y(t))^3 > 0,$$

la solution y est alors strictement croissante sur l'intervalle $]-b, b[$.