



Examen final - 02 février 2022. Durée : 1 h 30

Nom et Prénom :

Matricule :.....

20

Exercice 1 (5 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $t^3 y' + t^2 y = -1$, **b)** $(t - 1) y'' + (t - 2) y' = 0$.

Réponse.

Exercice 2 (5 pts.) : On se propose d'intégrer sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle de Riccati :

$$(E_1) : y' + \frac{1}{t}y - \frac{1}{t^3}y^2 = 2t.$$

- a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $y_0(t) = at^2$ soit une solution particulière de (E_1) .
- b) Montrer que le changement de fonction inconnue $y(t) = y_0(t) + \frac{1}{z(t)}$ transforme l'équation (E_1) en une équation différentielle (E_2) linéaire d'ordre 1.
- c) En déduire les solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$.

Réponse.

Exercice 3 (6 pts.) : On considère l'équation différentielle $(E_3) : (t-1)y'' - ty' + y = (t-1)^2$ sur $]1, +\infty[$.

Soit $(E_4) : (t-1)y'' - ty' + y = 0$ son équation homogène associée.

- Déterminer une solution de l'équation (E_4) de la forme $y_0(t) = e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- On pose alors $y(t) = e^{\alpha t} z(t)$ dans (E_4) . Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ?
- En déduire les solutions de (E_4) sur $]1, +\infty[$.
- Déterminer une solution de l'équation (E_3) de la forme $y_p(t) = at^2 + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
- En déduire les solutions de (E_3) sur $]1, +\infty[$.

Réponse.

Exercice 4 (4 pts.) : On considère le problème de Cauchy (P_1) :
$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{6} |y| \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

a) Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}t\sqrt{t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy (P_1) .

b) Conclure.

Réponse.