USTHB 20201-2022 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
3ème année LAC

Test n^{0}1 - 09 janvier 2022. Durée : 30 minutes

Nom et Prénom :

Matricule :

$\overline{}$ **20**

Exercice 1 (10 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $t^2y' - ty = 1$, **b)** $y' = \dfrac{y}{t} + 1 - \left(\dfrac{y}{t}\right)^2$ sur $]0, +\infty[$ (poser $s = \dfrac{y}{t}$).

Réponse.

a) L'équation différentielle $t^2y' - ty = 1$, est linéaire d'ordre 1, à coefficients non constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $t^2y' - ty = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = \frac{1}{t}$ ou $\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log}\,|y(t)| = \text{Log}\,|t| + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = C \cdot t, \quad C \in \mathbb{R}$.

On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t) \cdot t$. Il vient $t^2 (C'(t) \cdot t + C(t)) - tC(t) \cdot t = 1$, et donc $C'(t) = \frac{1}{t^3}$, ce qui permet, en intégrant de trouver $C(t) = -\frac{1}{2t^2}$.

La solution générale de l'équation $t^2y' - ty = 1$ est donc

$$y = -\frac{1}{2t} + \lambda t \ \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation $y' = \dfrac{y}{t} + 1 - \left(\dfrac{y}{t}\right)^2$ est de *type-homogène*. On pose alors $s = \frac{y}{t}$ ou $y = st$ et donc $y' = \frac{dy}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} = s + 1 - s^2$, qui est équivalente à $t\frac{ds}{dt} = 1 - s^2$.

Si $1 - s^2 \neq 0$, alors $\frac{ds}{1-s^2} = \frac{dt}{t}$ ou $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right) ds = \frac{dt}{t}$. C'est une équation à variables séparées, qui donne en intégrant $\frac{1+s}{1-s} = \lambda t^2, \lambda \in \mathbb{R}$ ou bien $s = \dfrac{\lambda t^2 - 1}{\lambda t^2 + 1}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Finalement, sur $]0, +\infty[$ on trouve

$$y = t\frac{\lambda t^2 - 1}{\lambda t^2 + 1}, \lambda \geq 0.$$

Si $1 - s^2 = 0$ alors $s = \pm 1$ qui donne $y = \pm t$.

Exercice 2 (10 pts.) : On se propose d'intégrer sur l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation différentielle de Riccati :

$$(E_1) : t^2 y' - ty + y^2 = t^2.$$

a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $y_0(t) = t^a$ soit une solution particulière de (E_1).

b) Montrer que le changement de fonction inconnue $y(t) = y_0(t) + \dfrac{1}{z(t)}$ transforme l'équation (E_1) en une équation différentielle (E_2) linéaire d'ordre 1.

c) En déduire les solutions de (E_1) sur $]0,+\infty[$.

Réponse.

a) Trouvons $a \in \mathbb{R}$ tel que $y_0(t) = t^a$ soit une solution particulière. Puisque

$$t^2 y_0' - ty_0 + y_0^2 = (a-1)\,t^{a+1} + t^{2a} \equiv t^2,$$

alors y_0 est solution si et seulement si $a = 1$. Donc $y_0(t) = t$ est une solution particulière de (E_1)..

b) Si z est une fonction $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas, on pose $y(t) = t + \dfrac{1}{z(t)}$. Alors y est solution si et seulement si

$$t^2\left(1 - \frac{z'(t)}{(z(t))^2}\right) - t\left(t + \frac{1}{z(t)}\right) + \left(t + \frac{1}{z(t)}\right)^2 = t^2.$$

Ce qui donne

$$\frac{-t^2 z'(t) + tz(t) + t^2(z(t))^2 + 1}{(z(t))^2} = t^2.$$

En multipliant par $-(z(t))^2$, on obtient que y est solution de (E_1) si et seulement si z vérifie

$$(E_2) : t^2 z'(t) - tz(t) = 1.$$

c) D'après l'exercice 1) question a), la solution générale de l'équation (E_2) est

$$z = \lambda t - \frac{1}{2t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On a alors nécessairement

$$y(t) = t \;\text{ ou }\; y(t) = t + \frac{1}{z(t)} = t + \frac{2t}{\lambda t^2 - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On va maintenant en déduire les solutions de (E_1) définies sur $]0,+\infty[$.

Soit $y = t + \dfrac{2t}{\lambda t^2 - 1}$ une solution $\mathcal{C}^1$ définie sur $]0,+\infty[$. Donc pour tout $t > 0$ on a $\lambda t^2 - 1 \neq 0$ ce qui est possible si $\lambda \leq 0$.

Donc si y est solution de (E_1), alors

$$y(t) = t \;\text{ ou }\; y(t) = t + \frac{2t}{\lambda t^2 - 1} = t\frac{\lambda t^2 + 1}{\lambda t^2 - 1} \text{ avec } \lambda \leq 0.$$