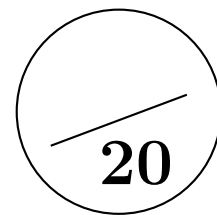




Corrigé de l'examen final - 25 mai 2023. Durée : 1 h 30

Nom et Prénom :

Matricule :



Exercice 1 (7 pts.) : Déterminer le type et la stabilité du point critique pour le système :

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 5x - 2y \end{cases}.$$

Trouver ensuite la solution générale (méthode au choix).

Réponse.

Commençons d'abord par réécrire le système sous forme matricielle :

$$X'(t) = A X(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} : \quad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

$$\text{Comme } \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \text{ alors}$$

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies A X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Autrement dit $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est l'unique point critique.

Calculons maintenant le polynôme caractéristique de A

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3). \quad \text{(2 pts)}$$

La matrice A admet donc deux valeurs propres $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 3$. Comme $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, alors $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un point de selle ou col **(1 pt)** instable **(1 pt)**.

Trouvons les vecteurs propres associés à chacune de λ_1 et λ_2 .

Soit E_{-3} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -3$:

$$E_{-3} = \ker(A + 3I) = \left\{ V = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (A + 3I)V = \mathbf{0} \right\}.$$

On a

$$V \in E_{-3} \Leftrightarrow (A + 3I)V = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = -5x.$$

Le sous-espace E_{-3} est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Soit E_3 le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$:

$$E_3 = \ker(A - 3I) = \{V = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (A - 3I)V = \mathbf{0}\}.$$

On a

$$V \in E_3 \Leftrightarrow (A - 3I)V = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = x.$$

Le sous-espace E_3 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

On en déduit que la solution générale du système différentielle linéaire $X'(t) = AX(t)$ est

$$X(t) = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t} \\ y(t) = -5c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t} \end{cases} \quad \textbf{(3 pts)}$$

Exercice 2 (13 pts.) : On considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ avec

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- a) Montrer que A admet une valeur propre simple $\lambda_1 = -2$ et une autre valeur propre double $\lambda_2 = -1$.
- b) Déterminer les vecteurs propres de A , puis en déduire que A n'est pas diagonalisable.
- c) Déterminer le sous-espace caractéristique $N_{\lambda_2} = \ker(A - \lambda_2 I)^2$ associé à la valeur propre double λ_2 .
- d) On note P la matrice formée des vecteurs colonnes qui engendrent les sous-espaces caractéristiques N_{λ_1} et N_{λ_2} . Calculer la matrice inverse P^{-1} .
- e) Soit D la matrice diagonale formée des valeurs propres λ_1 et λ_2 de A . En déduire la décomposition de Dunford de A ($A = \Delta + N$, $\Delta = PDP^{-1}$ et $N = A - \Delta$ est nilpotente avec $\Delta N = N\Delta$).
- f) En déduire la valeur de e^{tA} .

g) Résoudre le système différentiel $X'(t) = A X(t)$ par la méthode de l'exponentielle d'une matrice.

h) Résoudre le système différentiel $X'(t) = A X(t) + B(t)$ où $B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Réponse.

a) On calcule le polynôme caractéristique de A qui est

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -1 & -3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 - \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda((-3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 1) + 2(-1 - \lambda) - 1 + (-2 - (-3 - \lambda)) \\ &= -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 \\ &= -(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -(\lambda + 2)(\lambda + 1)^2. \quad \text{(1 pt)} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$ valeur propre simple et $\lambda_2 = -1$ valeur propre double.

b) Déterminons les sous-espaces propres associés à $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$.

Soit E_{-2} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -2$:

$$E_{-2} = \ker(A + 2I) = \{V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (A + 2I)V = \mathbf{0}\}.$$

On a

$$\begin{aligned} V \in E_{-2} &\Leftrightarrow (A + 2I)V = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Le sous-espace E_{-2} est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Soit E_{-1} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -1$:

$$E_{-1} = \ker(A + I) = \{V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (A + I)V = \mathbf{0}\}.$$

On a

$$V \in E_{-1} \Leftrightarrow (A + I)V = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}.$$

Le sous-espace E_{-1} est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(0.5 pt)**

La dimension de E_{-1} est égale à 1 alors que la multiplicité de la valeur propre -1 correspondante est égale à 2. Par conséquent, la matrice A ne sera pas diagonalisable. **(0.5 pt)**

c) Déterminons le sous-espace caractéristique $N_{-1} = \ker(A + I)^2$ associé à la valeur propre double $\lambda_2 = -1$.

Pour cela calculons la matrice $(A + I)^2$.

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $V = (x_1, x_2, x_3) \in N_{-1} = \ker(A + I)^2$. On a

$$(A + I)^2 V = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = -x_2.$$

Le sous-espace caractéristique N_{-1} est le plan vectoriel engendré par les vecteurs

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad \textbf{(2 pts)}$$

d) La matrice $P = [V_1 v_2 v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Pour calculer P^{-1} on utilise la technique qui consiste à résoudre le système $PX = Y$ pour un second membre Y quelconque, puis à écrire la solution obtenue

$X = A^{-1}Y$. On a donc

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ -x_1 + x_3 = y_2 \\ -x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_3 = -y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Alors $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **(1 pt)**

e) La matrice diagonale formée des valeurs propres $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$ est $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Écrivons la décomposition de Dunford de A .

On a

$$\Delta = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ **(0.75 pt)**}$$

qui est une matrice diagonalisable.

La matrice N est

$$N = A - \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ **(0.75 pt)**}$$

On vérifie facilement que $N^2 = \mathbf{0}$, c'est-à-dire que la matrice N est nilpotente et que les deux matrices Δ et N commutent, $\Delta N = N \Delta$ **(0.5 pt)**. Ainsi la décomposition $A = \Delta + N$ est bien la décomposition de Dunford de la matrice A .

f) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons e^{tA} .

On utilise la décomposition de Dunford de la matrice tA , $tA = t\Delta + tN$, on a donc

$$e^{tA} = e^{t\Delta + tN} = e^{t\Delta} \cdot e^{tN}$$

5/7

car les matrices commutent, par ailleurs, comme $\Delta = PDP^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} e^{t\Delta} &= e^{tPDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-t} & 0 \\ -e^{-2t} & 0 & e^{-t} \\ 0 & 0 & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et comme $N^2 = \mathbf{0}$, on a

$$e^{tN} = I + tN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+1 & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ t & t & 1 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t+1 & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ t & t & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}(t+1) & e^{-t}(t+1) - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -te^{-t} & e^{-2t} - te^{-t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ te^{-t} & te^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} t+1 & t+1 & 1 \\ -t & -t & -1 \\ t & t & 1 \end{bmatrix}. \quad (2 \text{ pts}) \end{aligned}$$

g) Donnons la solution du système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

Les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont les fonctions $X(t) = e^{tA}C$ où C est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Donc

$$\begin{aligned} X(t) &= \left(e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} t+1 & t+1 & 1 \\ -t & -t & -1 \\ t & t & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} -(c_2 + c_3) \\ c_2 + c_3 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} t(c_1 + c_2) + c_1 + c_2 + c_3 \\ -t(c_1 + c_2) - c_3 \\ t(c_1 + c_2) + c_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ou bien

$$X(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -k_1 \\ k_1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} k_2 t + k_2 + k_3 \\ -k_2 t - k_3 \\ k_2 t + k_3 \end{bmatrix}, \quad (2 \text{ pts})$$

où k_1, k_2, k_3 sont des constantes quelconques de $\mathbb{R}$.

h) La solution du système $X'(t) = A X(t) + B(t)$ est

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t),$$

où $X_h(t)$ est la solution du système homogène $X'(t) = A X(t)$ et $X_p(t)$ une solution particulière de $X'(t) = A X(t) + B(t)$ donnée par la méthode de variation des constantes par

$$\begin{aligned} X_p(t) &= e^{tA} \int e^{-tA} B(t) dt \\ &= e^{tA} \int \left(e^{2t} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} -t+1 & -t+1 & 1 \\ t & t & -1 \\ -t & -t & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} dt \\ &= e^{tA} \int \left(e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) dt = e^{tA} \left(\frac{1}{2} e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} t+1 & t+1 & 1 \\ -t & -t & -1 \\ t & t & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\frac{1}{2} e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La solution de $X'(t) = A X(t) + B(t)$ est donc

$$X(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -k_1 \\ k_1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} k_2 t + k_2 + k_3 \\ -k_2 t - k_3 \\ k_2 t + k_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2 \text{ pts})$$