



Examen final - 18 janvier 2023. Durée : 1 h 30

Nom et Prénom :

Matricule :.....

20

Exercice 1 (7 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes puis déterminer l'unique fonction solution vérifiant les conditions initiales données.

a) $ty' = \alpha y + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y(1) = 0$.

b) $y'' - (\alpha + 1)y' + \alpha y = \alpha t - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Réponse.

Exercice 2 (7 pts.) : On considère l'équation différentielle $(E_1) : 2yy' + t^2 + y^2 + 2t = 0$.

Soit $\omega(t, y) = Pdt + Qdy$ avec $P = t^2 + y^2 + 2t$ et $Q = 2y$, la forme différentielle associée.

- Vérifier que ω n'est pas exacte.
- Chercher un facteur intégrant μ sous la forme $\mu(t, y) = \varphi(t)$. *Indication* : φ vérifie $\frac{\partial(\varphi P)}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial t}$.
- Trouver une fonction $u(t, y)$ telle que $du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \varphi(t) \omega(t, y)$.
- En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E_1) .
- En posant $v = y^2$, retrouver la solution générale de (E_1) .

Réponse.

Exercice 3 (6 pts.) : On considère l'équation différentielle $(E_2) : y' = t^2 + y^2$.

- Montrer que (E_2) possède une solution maximale unique y qui vérifie $y(0) = 0$.
- Montrer que y est une fonction impaire.
- Étudier la monotonie, le signe et la concavité de y .
- Montrer que y est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
- Dresser le tableau de variation de y .

Réponse.