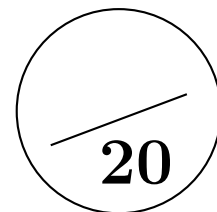




Nom et Prénom :

Matricule :



Exercice 1 (7 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes puis déterminer l'unique fonction solution vérifiant les conditions initiales données.

a) $ty' = \alpha y + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y(1) = 0$.

b) $y'' - (\alpha + 1)y' + \alpha y = \alpha t - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Réponse.

a) L'équation différentielle $ty' = \alpha y + \beta t$, est linéaire d'ordre 1, à coefficients non constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $ty' - \alpha y = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{t}$ ou $\frac{dy}{y} = \frac{\alpha}{t} dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\text{Log } |y(t)| = \text{Log } |t|^\alpha + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = Ct^\alpha$, $C \in \mathbb{R}$.

On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t) t^\alpha$. Il vient $t(C'(t) t^\alpha + \alpha C(t) t^{\alpha-1}) = \alpha C(t) t^\alpha + \beta$, et donc $C'(t) = \beta t^{-1-\alpha}$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = \frac{\beta}{-\alpha} t^{-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } C(t) = \beta \text{Log } |t| \text{ si } \alpha = 0.$$

La solution générale de l'équation $ty' = \alpha y + \beta$ est donc

$$y = \frac{-\beta}{\alpha} + \lambda t^\alpha \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } y = \lambda + \beta \text{Log } |t| \text{ si } \alpha = 0 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, si l'on cherche une solution vérifiant $y(1) = 0$, on doit avoir

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } \lambda = 0 \text{ si } \alpha = 0.$$

L'unique solution qui vérifie $y(1) = 0$ est donc

$$y = \frac{\beta}{\alpha} (t^\alpha - 1) \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } y = \beta \text{Log } |t| \text{ si } \alpha = 0.$$

b) L'équation différentielle en question, est linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y'' - (\alpha + 1)y' + \alpha y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - (\alpha + 1)r + \alpha = 0$ qui admet pour discriminant $(\alpha - 1)^2$ dont les racines sont $\pm(\alpha + 1)$. Les solutions de l'équation caractéristique sont donc $r_1 = \alpha, r_2 = 1$ et les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{\alpha t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière sous la forme $y_p(t) = at + b$. On a

$$y_p'(t) = a, \quad y_p''(t) = 0.$$

Alors

$$y_p'' - (\alpha + 1)y_p' + \alpha y_p = -a(\alpha + 1) + \alpha(at + b) = \alpha at + \alpha b - a(\alpha + 1).$$

Par identification, on cherche a et b satisfaisant le système

$$\begin{cases} \alpha a = \alpha \\ \alpha b - a(\alpha + 1) = -1 \end{cases}.$$

La résolution de ce système donne $a = b = 1$. Les solutions de l'équation non homogène sont donc

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{\alpha t} + t + 1, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ donnent le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -1 \\ \lambda + \alpha\mu = -1 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $\lambda = -1$ et $\mu = 0$ car $\alpha \neq 1$. L'unique solution vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$ est donc

$$y(t) = -e^t + t + 1.$$

Exercice 2 (7 pts.) : On considère l'équation différentielle $(E_1) : 2yy' + t^2 + y^2 + 2t = 0$.

Soit $\omega(t, y) = Pdt + Qdy$ avec $P = t^2 + y^2 + 2t$ et $Q = 2y$, la forme différentielle associée.

a) Vérifier que ω n'est pas exacte.

b) Chercher un facteur intégrant μ sous la forme $\mu(t, y) = \varphi(t)$. *Indication :* φ vérifie $\frac{\partial(\varphi P)}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial t}$.

c) Trouver une fonction $u(t, y)$ telle que $du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \varphi(t)\omega(t, y)$.

d) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E_1) .

e) En posant $v = y^2$, retrouver la solution générale de (E_1) .

Réponse.

a) Posons $P(t, y) = t^2 + y^2 + 2t$ et $Q(t, y) = 2y$. On a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

On remarque que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial t}$. La forme ω n'est donc pas exacte.

b) La fonction $\varphi(t)$ est facteur intégrant si et seulement si

$$\frac{\partial(\varphi P)}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial t} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial}{\partial y}(\varphi(t)(t^2 + y^2 + 2t)) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(t)2y).$$

Ceci équivaut à $2y\varphi(t) = 2y\varphi'(t)$. Ainsi $\varphi'(t) = \varphi(t)$ pour tout t . Donc $\varphi(t) = ke^t$ avec k constante.

On peut choisir $k = 1$. Ainsi

$$\varphi(t)\omega(t, y) = (t^2 + y^2 + 2t)e^t dt + 2ye^t dy.$$

c) On cherche ensuite u telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (t^2 + y^2 + 2t)e^t \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^t.$$

En intégrant la deuxième équation par rapport à y , on trouve

$$u(t, y) = y^2 e^t + c(t).$$

En dérivant cette expression par rapport à t et en égalisant avec la première équation du système, on obtient

$$y^2 e^t + c'(t) = (t^2 + y^2 + 2t)e^t,$$

c'est-à-dire

$$c'(t) = (t^2 + 2t)e^t.$$

Il en résulte que $c(t) = t^2 e^t + c$ et donc que

$$u(t, y) = (t^2 + y^2)e^t + c \quad \text{avec } c \text{ dans } \mathbb{R}.$$

d) La solution générale de (E_1) est donc donnée sous forme

$$(t^2 + y^2)e^t = \lambda \quad \text{avec } \lambda \text{ dans } \mathbb{R}.$$

e) En posant $v = y^2$, $2yy' = v'$ et l'équation (E_1) devient

$$v' + v = -(t^2 + 2t),$$

dont la solution est $v = \lambda e^{-t} + at^2 + bt + c$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On alors

$$v' + v = at^2 + (2a + b)t + b + c.$$

Par identification, on trouve $a = 1, b = c = 0$. On retrouve alors la solution

$$y^2 = \lambda e^{-t} - t^2 \quad \text{ou bien} \quad (t^2 + y^2)e^t = \lambda \quad \text{avec } \lambda \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Exercice 3 (6 pts.) : On considère l'équation différentielle $(E_2) : y' = t^2 + y^2$.

- a) Montrer que (E_2) possède une solution maximale unique y qui vérifie $y(0) = 0$.
- b) Montrer que y est une fonction impaire.
- c) Étudier la monotonie, le signe et la concavité de y .
- d) Montrer que y est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
- e) Dresser le tableau de variation de y .

Réponse.

- a) La fonction $f : (t, y) \mapsto t^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution maximale unique au problème de Cauchy posé, solution définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.
- b) Soit $z : t \mapsto -y(-t)$ définie sur un intervalle $J =]-b, -a[$ symétrie de I par rapport à 0. La fonction z est dérivable et est encore solution du problème de Cauchy précédent car

$$z'(t) = y'(-t) = (-t)^2 + (y(-t))^2 = t^2 + (z(t))^2 \quad \text{et} \quad z(0) = y(-0) = 0.$$

Donc $J =]-b, -a[\subset I =]a, b[$ et pour tout $t \in J$, $z(t) = y(t)$.

Or puisque J est le symétrique de I , on observe $J = I$ puis $z = y$. Ce qui montre que y est bien une fonction impaire.

- c) On a $y'(t) = t^2 + (y(t))^2 \geq 0$ donc y est croissante. Comme $y(0) = 0$, alors y est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction y est deux fois dérivable et

$$y''(t) = 2t + 2y(t)y'(t) = 2t + 2(t^2 + y^2(t))y(t).$$

Donc y'' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$ d'où la concavité de y sur $\mathbb{R}_-$ et convexité de y sur $\mathbb{R}_+$.

- d) Supposons par l'absurde que y soit définie sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$, alors, du fait que y est impaire, elle serait définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Dans ce cas, pour $t \geq 1$ on aura $y'(t) \geq 1 + y^2(t)$ ou encore $\frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} \geq 1$ donc en intégrant, on obtient $\text{Arctg}(y(t)) \geq t - 1 + \text{Arctg}(y(1))$. Ceci est absurde car $\text{Arctg}(y(t)) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Donc que y est bien définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$ qu'on notera $I =]-a, a[$ où $a > 0$.

- e) La fonction y est définie, impaire, croissante sur $I =]-a, a[$.

Reste à étudier $\lim_{t \rightarrow a^-} y(t)$. Cette limite existe compte tenu de la monotonie de y et soit réelle, soit $+\infty$.

Si $\lim_{t \rightarrow a^-} y(t) = l \in \mathbb{R}$, alors posons $y(a) = l$ et $y(-a) = -l$. La fonction y est alors continue sur $[-a, a]$. De plus $\lim_{|t| \rightarrow a} y'(t) = a^2 + l^2 \in \mathbb{R}$, donc ce prolongement est $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ et vérifie l'équation différentielle en a . Ceci est absurde car y est solution maximale.

Par suite $\lim_{t \rightarrow a^-} y(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -a^+} y(t) = -\infty$.

t	$-a$	0	a
$y'(t)$	$+$	$\circ$	$+$
$y(t)$	$-\infty$	$\circ$	$+\infty$

