USTHB 2022-2023 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
$3^{\text{ème}}$ année

Série d'exercices n° 3 : Équations différentielles du second ordre

Exercice 1 : *(Équations différentielles incomplètes)*

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y' = t + 2$, **b)** $ty'' = y' + t^2$, **c)** $y^2 y'' + y' = 0$, **d)** $yy'' = y' + (y')^2$, **e)** $y'' = e^{2y}$.

Exercice 2 : *(Équations type-homogènes)*

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $2yy'' - 3(y')^2 = 4ty^2$, **b)** $yy'' - (y')^2 + yy' + ty^2 = 0$.

Exercice 3 :

Montrer que l'équation différentielle :

$$\left(1 - t^2\right) y'' - 2ty' + 2y = 0$$

possède pour solution particulière un polynôme.

En déduire les solutions de cette équation différentielle.

Exercice 4 :

Déterminer une solution particulière de chacune des équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{4t}$, **b)** $y'' - y' + y = 5$, **c)** $y'' + 2y' + 5y = \cos t$,

d) $y'' + y' - 2y = t + \cos t$, **e)** $y'' - 3y' + 2y = e^t \sin(3t)$, **f)** $y'' + 3y' + 2y = (t^2 + 1)\, e^{-t}$.

En déduire les solutions de ces équations différentielles.

Exercice 5 :

Résoudre en utilisant la méthode de variation des constantes les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos t}$, **b)** $y'' - y = \dfrac{1}{(1 + e^{-t})^2}$.

Exercice 6 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$, **b)** $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 2t \operatorname{Log} t$, **c)** $t^2 y'' + ty' + y = 6 - \operatorname{Log} t$.

Exercice 7 :

En posant $s = \operatorname{Arctg} t$, résoudre l'équation différentielle $\left(t^2+1\right)^2 y'' + 2t\left(t^2+1\right) y' + \alpha y = 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + yy' = 0$,

b) $\left(y + 3\left(y'\right)^2\right) y'' - 2\left(y'\right)^2 = 0$,

c) $y^2 + 2\left(y'\right)^2 - yy'' = 0$,

d) $y'' + y' - 2y = 4t$,

e) $y'' - 2y' - 3y = e^{-t}\left(8t+6\right)$,

f) $y'' + y' - 6y = \operatorname{th} t$,

g) $y'' - 2y' + 5y = \dfrac{e^t}{\cos t}$,

h) $\left(t^2 - t\right) y'' + \left(2 - t\right) y' - 3y = t^2$,

i) $y'' - 2y' + 2y = e^t \operatorname{tg} t$,

j) $2t^2 y'' + ty' - y = 0$,

k) $y'' + 4y' + \alpha y = e^{-2t}, \alpha \in \mathbb{R}$,

l) $t^2 y'' + ty' + y = \operatorname{Log}\left(te\right)$,

m) $y'' + 2ty' = -t$,

n) $y'' = y^{-2} y'$,

o) $\left(1 - t^2\right) y'' - ty' + y = 0$.