USTHB 2022-2023 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
3ème année L Math

Test n^{0}1 - 03 mai 2023. Durée : 25 minutes

Nom et Prénom :.....

Matricule :.....

/ **15**

Exercice 1 (15 pts.) : On considère le système différentiel $X'(t) = A\,X(t)$ avec

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Montrer que la matrice A admet une valeur propre double notée α.

b) Déterminer les vecteurs propres de A, puis en déduire que A n'est pas diagonalisable.

c) On note V_1 un vecteur propre de A. Choisir un autre vecteur V_2 vérifiant $(A - \alpha I)\,V_2 = V_1$ tel que $\{V1, V2\}$ soit une famille libre.

d) On définit la matrice $P = [V_1 V_2]$. Déterminer la matrice inverse P^{-1}.

e) Vérifier que $T = P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire supérieure.

f) Résoudre le système différentiel $Y'(t) = T\,Y(t)$ où $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$.

g) En déduire la solution du système différentiel $X'(t) = A\,X(t)$.

h) Résoudre le système différentiel $X'(t) = A\,X(t) + B(t)$ où $B(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Réponse.