USTHB 2022-2023 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
3ème année L Math

Corrigé du test n°1 - 03 mai 2023. Durée : 25 minutes

Nom et Prénom :..

Matricule :..

/15

Exercice 1 (15 pts.) : On considère le système différentiel $X'(t) = A\,X(t)$ avec

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Montrer que la matrice A admet une valeur propre double notée α.

b) Déterminer les vecteurs propres de A, puis en déduire que A n'est pas diagonalisable.

c) On note V_1 un vecteur propre de A. Choisir un autre vecteur V_2 vérifiant $(A - \alpha I)\,V_2 = V_1$ tel que $\{V1, V2\}$ soit une famille libre.

d) On définit la matrice $P = [V_1 V_2]$. Déterminer la matrice inverse P^{-1}.

e) Vérifier que $T = P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire supérieure.

f) Résoudre le système différentiel $Y'(t) = T\,Y(t)$ où $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$.

g) En déduire la solution du système différentiel $X'(t) = A\,X(t)$.

h) Résoudre le système différentiel $X'(t) = A\,X(t) + B(t)$ où $B(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Réponse.

a) On calcule le polynôme caractéristique de A qui est

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Le polynôme caractéristique admet une racine double qui est $\lambda = 2$. Alors $\alpha = 2$ est valeur propre double.

b) Déterminons le sous-espace propre associé à $\lambda = 2$.

Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre double $\alpha = 2$:

$$E_2 = \ker(A - 2I) = \left\{ V = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (A - 2I)\,V = 0 \right\}.$$

On a

$$V \in E_2 \Leftrightarrow (A - 2I)\,V = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Le sous-espace E_2 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

La dimension de E_2 est égale à 1 alors que la multiplicité de la valeur propre 2 correspondante est égale à 2. Par conséquent, la matrice A ne sera pas diagonalisable.

c) On cherche un autre vecteur $V_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vérifiant $(A - 2I)\, V_2 = V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. On a donc

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = x_1 + 1.$$

On peut choisir par exemple $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Les vecteurs $\{V1, V2\}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ car $\det\{V1, V2\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

d) La matrice $P = [V_1 V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pour calculer P^{-1} on utilise la technique qui consiste à résoudre le système $PX = Y$ pour un second membre Y quelconque, puis à écrire la solution obtenue $X = A^{-1}Y$. On a donc

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -x_1 + y_2 = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Alors $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

e) On a

$$T = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

qui est une matrice triangulaire supérieure.

f) On a

$$Y'(t) = T\, Y(t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases}.$$

La deuxième équation différentielle $y_2' = 2y_2$ a comme solution $y_2 = c_2 e^{2t}$, c_2 une constante réelle arbitraire.

L'équation différentielle pour y_1 devient $y_1' = 2y_1 + c_2 e^{2t}$ qui a comme solution $y_1 = (c_1 + c_2 t)\, e^{2t}$.

Alors

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2 t)\, e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

g) On a $T = P^{-1}AP$, alors $A = PTP^{-1}$ et

$$X'(t) = A\,X(t) = PTP^{-1}\,X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = TP^{-1}\,X(t).$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient le système différentiel $Y'(t) = T\,Y(t)$ qui a comme solution $Y(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{bmatrix}$. Alors

$$X(t) = P\,Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_1 + c_2 + c_2 t \end{bmatrix}.$$

h) La solution du système homogène $X'(t) = A\,X(t)$ peut s'écrire

$$X(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_1 + c_2 + c_2 t \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = M(t)\,C,$$

où

$$M(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Une solution particulière de $X'(t) = A\,X(t) + B(t)$ par la méthode de variation des constantes est

$$X_p(t) = M(t) \int M^{-1}(t)\, B(t)\, dt.$$

On calcule la matrice inverse de $M(t)$ on trouve $M^{-1}(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} X_p(t) &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{bmatrix} \int \left(e^{-2t} \begin{bmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) dt \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{bmatrix} \int \left(\begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} \right) dt = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La solution de $X'(t) = A\,X(t) + B(t)$ est donc $X(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_1 + c_2 + c_2 t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.