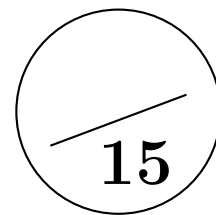




Test n^o1 - 05 décembre 2022. Durée : 30 minutes

Nom et Prénom :

Matricule :



Exercice 1 (15 pts.) : On considère l'équation différentielle $(E) : t^2 y'' - 5ty' + 9y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

- Déterminer une solution de l'équation (E) de la forme $y(t) = t^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- On pose alors $y(t) = t^\alpha z(t)$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ?
- En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Réponse.

- a) Soit $y(t) = t^\alpha$ une solution de (E) . En remplaçant dans l'équation différentielle (E) , on obtient

$$t^2 \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} - 5t \alpha t^{\alpha-1} + 9t^\alpha = 0 \text{ ou bien } (\alpha - 3)^2 t^\alpha = 0.$$

Si $\alpha = 3$, on a alors $t \mapsto y_0(t) = t^3$ est une solution de (E) .

- b) On pose $y(t) = t^3 z(t)$. Alors $y'(t) = 3t^2 z(t) + t^3 z'(t)$ et $y''(t) = 6tz(t) + 6t^2 z'(t) + t^3 z''(t)$.

En remplaçant dans l'équation différentielle (E) , on obtient

$$t^2 (6tz(t) + 6t^2 z'(t) + t^3 z''(t)) - 5t (3t^2 z(t) + t^3 z'(t)) + 9t^3 z(t) = 0.$$

En simplifiant, on trouve $t^4 (tz''(t) + z'(t)) = 0$ ou encore $tz''(t) + z'(t) = 0$.

- c) En posant $u = z'$, l'équation différentielle vérifiée par z est équivalente à

$$\frac{u'}{u} = \frac{-1}{t},$$

qui est une équation différentielle du premier ordre. Ses solutions sont $u(t) = \frac{\lambda}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'où

$$z'(t) = \frac{\lambda}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Encore par intégration, on trouve

$$z(t) = \lambda \operatorname{Log} |t| + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Alors les solutions de l'équation différentielle initiale (E) sont

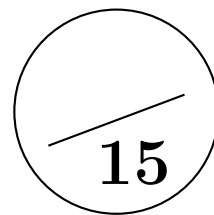
$$y(t) = t^3 z(t) = \lambda t^3 \operatorname{Log} |t| + \mu t^3, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



Test n^o1 - 07 décembre 2022. Durée : 20 minutes

Nom et Prénom :

Matricule :



Exercice 1 (15 pts.) : On considère l'équation différentielle $(E) : t^2 y'' - 7ty' + 16y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

- Déterminer une solution de l'équation (E) de la forme $y(t) = t^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- On pose alors $y(t) = t^\alpha z(t)$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ?
- En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Réponse.

- a) Soit $y(t) = t^\alpha$ une solution de (E) . En remplaçant dans l'équation différentielle (E) , on obtient

$$t^2 \alpha (\alpha - 1) t^{\alpha-2} - 7t \alpha t^{\alpha-1} + 16t^\alpha = 0 \text{ ou bien } (\alpha - 4)^2 t^\alpha = 0.$$

Si $\alpha = 4$, on a alors $t \mapsto y_0(t) = t^4$ est une solution de (E) .

- b) On pose $y(t) = t^4 z(t)$. Alors $y'(t) = 4t^3 z(t) + t^4 z'(t)$ et $y''(t) = 12t^2 z(t) + 8t^3 z'(t) + t^4 z''(t)$.

En remplaçant dans l'équation différentielle (E) , on obtient

$$t^2 (12t^2 z(t) + 8t^3 z'(t) + t^4 z''(t)) - 7t (4t^3 z(t) + t^4 z'(t)) + 16t^4 z(t) = 0.$$

En simplifiant, on trouve $t^5 (tz''(t) + z'(t)) = 0$ ou encore $tz''(t) + z'(t) = 0$.

- c) En posant $u = z'$, l'équation différentielle vérifiée par z est équivalente à

$$\frac{u'}{u} = \frac{-1}{t},$$

qui est une équation différentielle du premier ordre. Ses solutions sont $u(t) = \frac{\lambda}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'où

$$z'(t) = \frac{\lambda}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Encore par intégration, on trouve

$$z(t) = \lambda \operatorname{Log} |t| + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Alors les solutions de l'équation différentielle initiale (E) sont

$$y(t) = t^4 z(t) = \lambda t^4 \operatorname{Log} |t| + \mu t^4, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$