USTHB 2018-2019 Semestre 2 **EDP**
Faculté de Mathématiques **3ème année Lic Math**

Test n^{0}1 - 24 juin 2019. Durée : 30 minutes

Nom et Prénom : ....

Matricule : ....

$\overline{}\,$**15**

Exercice 1 (6 pts.) :

Résoudre le problème à valeur initiale suivant : $c\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=u^2$, $u(x,0)=\varphi(x)$,

où $c>0$, φ est une fonction donnée et $u=u(x,y)$.

Réponse.

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{dt}=c,\qquad x(0)=s, \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt}=1,\qquad y(0)=0. \tag{2}$$

La solution de ce système est $x(t)=ct+s$ et $y(t)=t$.

Si on considère maintenant u comme une fonction de t, i.e. $u(t)=u(x(t),y(t))$, alors par la règle de chaînes et le fait que u est une solution de l'EDP, on obtient

$$\frac{du}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial u}{\partial y}=u^2 \text{ avec } u(0)=u(x(0),y(0))=u(s,0)=\varphi(s). \tag{3}$$

Cette équation différentielle est équivalente à $\dfrac{du}{u^2}=dt$. En prenant une primitive de chaque membre on obtient $-\dfrac{1}{u(t)}+\dfrac{1}{u(0)}=t$. Et donc $u(t)=\dfrac{u(0)}{1-tu(0)}=\dfrac{\varphi(s)}{1-t\varphi(s)}$.
Alors pour chaque s, la courbe caractéristique est

$$t\longmapsto(x(t,s),y(t,s),u(t,s))=\left(ct+s,t,\frac{\varphi(s)}{1-t\varphi(s)}\right).$$

La fonction $(t,s)\longmapsto(x(t,s),y(t,s))=(t+s,ct)$ a une fonction inverse. En effet, $t=y$ et $s=x-ct=x-cy$.

En substituant les expressions pour s et t dans $u(t,s)$ par leurs valeurs en fonction de x et y on obtient la solution du problème :

$$u(x,y)=\frac{\varphi(x-cy)}{1-y\varphi(x-cy)}.$$

On peut vérifier que cette fonction est bien une solution du problème. En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi(x-cy)}{1-y\varphi(x-cy)}\right)=\frac{\varphi'(x-cy)(1-y\varphi(x-cy))-(-y\varphi'(x-cy))\varphi(x-cy)}{(1-y\varphi(x-cy))^2}\\&=\frac{\varphi'(x-cy)}{(1-y\varphi(x-cy))^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-c\varphi'(x-cy)(1-y\varphi(x-cy)) - (-\varphi(x-cy)+cy\varphi'(x-cy))\varphi(x-cy)}{(1-y\varphi(x-cy))^2}\\ &= \frac{-c\varphi'(x-cy)+(\varphi(x-cy))^2}{(1-y\varphi(x-cy))^2}.\end{aligned}$$

Donc

$$c\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(\varphi(x-cy))^2}{(1-y\varphi(x-cy))^2} = u^2 \text{ et } u(x,0)=\varphi(x).$$

Exercice 2 (9 pts.) : Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et soit l'EDP linéaire d'ordre deux suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+a)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (E)$$

a) Déterminer si l'équation (E) est hyperbolique, parabolique ou elliptique.

b) Déterminer les équations caractéristiques de cette équation.

c) Transformer cette équation en sa première forme canonique.

d) En déduire la solution générale de (E).

e) Trouver la solution de (E) si $u(0,y) = y$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = y^2$.

Réponse.

a) On a $B^2 - 4AC = (1+a)^2 - 4a = 1+2a+a^2-4a = 1-2a+a^2 = (1-a)^2$. Comme $a \neq 1$, alors $B^2-4AC > 0$. Donc l'équation est hyperbolique sur $\mathbb{R}^2$.

b) Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = \frac{1+a+1-a}{2} = 1 \text{ et } \frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = \frac{1+a-1+a}{2} = a.$$

Les solutions de ces équations différentielles ordinaires sont respectivement $y = x + c_1$ et $y = ax + c_2$. On peut donc considérer les coordonnées caractéristiques

$$\xi(x,y) = y - x \quad \text{et} \quad \eta(x,y) = y - ax.$$

c) On peut maintenant effectuer le changement de variables $\xi = y - x$ et $\eta = y - ax$. Par la règle de chaînes, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

En substituant ceci dans l'EDP, on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (1+a)\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$
$$+a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0.$$

En simplifiant, on trouve $-(a-1)^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0$. La forme canonique de cette EDP est donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

d) En intégrant par rapport à ξ puis par rapport à η, on trouve

$$u(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta),$$

où g et h sont deux fonctions arbitraires. Alors

$$u(x, y) = g(y - x) + h(y - ax).$$

e) Avec les conditions $u(0, y) = y$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = y^2$ on obtient le système

$$\begin{cases} g(y) + h(y) = y \\ -g'(y) - ah'(y) = y^2 \end{cases}.$$

En intégrant la deuxième équation et en rajoutant la première équation, on trouve

$$h(y) = \tfrac{1}{1-a}\left(y + \frac{1}{3}y^3 + c\right).$$

Et donc

$$g(y) = y - \tfrac{1}{1-a}\left(y + \frac{1}{3}y^3 + c\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} u(x, y) &= g(y - x) + h(y - ax) \\ &= -\tfrac{a}{1-a}(y - x) - \tfrac{1}{3(1-a)}(y - x)^3 + \tfrac{1}{1-a}(y - ax) + \tfrac{1}{3(1-a)}(y - ax)^3 \\ &= \frac{a^2 + a + 1}{3}x^3 - (a + 1)x^2 y + xy^2 + y. \end{aligned}$$