USTHB 2018-2019 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

EDP
3ème année Lic Math

Test n^{0}2 - 15 juillet 2019. Durée : 30 minutes

Nom et Prénom :....................

Matricule :....................

15

Exercice 1 (8 pts.) : En utilisant la méthode de séparation des variables, résoudre l'équation du télégraphe

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\alpha+\beta)\dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

où $c, \alpha, \beta > 0$, f est une fonction donnée, $u = u(x,t)$ et $\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 c^2 - \frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2 > 0, n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse.

Nous cherchons à déterminer des solutions de ce problème qui sont de la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. En substituant dans l'EDP, nous obtenons

$$X(x)T''(t) + (\alpha+\beta)X(x)T'(t) + \alpha\beta X(x)T(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

En divisant les deux côtés de cette équation par $c^2 X(x)T(t)$, nous obtenons

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{T''(t)}{T(t)} + (\alpha+\beta)\frac{T'(t)}{T(t)} + \alpha\beta\right) = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Le terme de gauche est une fonction de t et celui de droite, une fonction de x. Pour que ceci soit possible, il faut que ces deux termes soient constants. Donc

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{T''(t)}{T(t)} + (\alpha+\beta)\frac{T'(t)}{T(t)} + \alpha\beta\right) = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \text{ où } \lambda \text{ est une constante.}$$

Nous pouvons aussi tenir compte des conditions au bord. Nous obtenons ainsi

$$u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0,$$

$$u(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(l)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(l) = 0.$$

Alors $X(x)$ satisfait le problème

$$X''(x) = \lambda X(x) \text{ avec } X(0) = X(l) = 0.$$

Il nous faut maintenant considérer les différents cas pour λ.

- Si $\lambda > 0$, alors la solution générale de

$$X''(x) = \lambda X(x)\, est X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}t} + Be^{-\sqrt{\lambda}t}.$$

En considérant les deux conditions $X(0) = X(l) = 0$, nous obtenons le système d'équations

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

La seule solution de ce système d'équations linéaires est $A = B = 0$. Il nous faut donc exclure le cas $\lambda > 0$.

- Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de $X''(x) = 0$ est $X(x) = A + Bx$. En considérant les deux conditions $X(0) = X(l) = 0$, nous obtenons $A = B = 0$. Il nous faut aussi exclure le cas $\lambda = 0$.

- Finalement si $\lambda < 0$, alors la solution générale de $X''(x) = \lambda X(x)$ est

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

En considérant les deux conditions $X(0) = X(l) = 0$, nous obtenons

$$A = 0 \text{ et } B\sin\left(\sqrt{-\lambda}l\right) = 0.$$

Comme nous cherchons une solution $X(x)$ non-triviale, nous pouvons supposer que $B \neq 0$ et conséquemment $\sin\left(\sqrt{-\lambda}l\right) = 0$. Alors $\sqrt{-\lambda}l = n\pi,\ n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{ et } X(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

En conclusion pour que l'équation $X''(x) = \lambda X(x)$ avec les conditions $X(0) = X(l) = 0$ ait une solution non-nulle, il faut que soit $\lambda < 0$ et dans ce cas

$$X_n(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Maintenant, considérons l'équation pour $T(t)$:

$$T''(t) + (\alpha + \beta)T'(t) + \left(\alpha\beta + c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)T(t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique associé à cette équation est $P(r) = r^2 + (\alpha + \beta)r + \left(\alpha\beta + c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)$. Ses racines sont $-\frac{\alpha+\beta}{2} \pm i\omega_n$. Alors la solution générale pour l'équation de $T(t)$ est

$$T_n(t) = e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\left(C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t)\right), \text{ où } C_n \text{ et } D_n \text{ sont des constantes.}$$

Nous pouvons conclure que si $\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, alors

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\left(C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

est solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\alpha+\beta)\dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Comme cette équation est linéaire, nous pouvons additionner ces solutions. Donc la solution formelle de ce dernier problème est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\left(C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Si nous revenons au problème initiale, il nous faut considérer les conditions initiales

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad 0 < x < l.$$

Comme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\left[\left(-\tfrac{\alpha+\beta}{2}C_n + D_n\omega_n\right)\cos(\omega_n t) - \left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}D_n + C_n\omega_n\right)\sin(\omega_n t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

donc avec la condition $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ nous obtenons

$$D_n = \tfrac{\alpha+\beta}{2}\frac{C_n}{\omega_n}.$$

En considérant la condition $u(x,0) = f(x)$, nous obtenons $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$, c'est-à-dire que les coefficients C_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont les coefficients de la série de Fourier impaire de $f(x)$. En d'autres termes,

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Exercice 2 (7 pts.) : Soit $a > 0$. On considère le filtre du second ordre régi par l'équation différentielle :

$$-\frac{1}{a^2}g'' + g = f$$

a) On suppose que les fonctions intervenant dans l'équation différentielle sont toutes intégrables.

En déduire une relation entre $\widehat{g}$ et $\widehat{f}$.

b) En déduire g. On rappelle que $\mathcal{F}\left(\frac{a^2}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \pi a e^{-a|\xi|}$ et $\mathcal{F}^2(f)(x) = 2\pi f(-x)$.

Réponse.

a) En appliquant la transformée de Fourier à cette équation et en tenant compte de la formule $\mathcal{F}(g'')(\xi) = (i\xi)^2\mathcal{F}(g)$, on obtient

$$\frac{\xi^2}{a^2}\widehat{g} + \widehat{g} = \widehat{f}.$$

D'où

$$\widehat{g} = \frac{a^2}{a^2+\xi^2}\widehat{f}.$$

b) En appliquant la transformée de Fourier inverse à cette dernière équation et en tenant compte de la formule $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$, on obtient

$$g(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{a^2}{a^2+\xi^2}\right) * f\right)(x).$$

Il nous reste à déterminer $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{a^2}{a^2+\xi^2}\right)$. On a $\mathcal{F}\left(\frac{a^2}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \pi a e^{-a|\xi|}$, donc $\mathcal{F}^2\left(\frac{a^2}{a^2+x^2}\right) = \mathcal{F}\left(\pi a e^{-a|x|}\right)$. Comme $\mathcal{F}^2(f)(x) = 2\pi f(-x)$, alors $\mathcal{F}\left(\pi a e^{-a|x|}\right) = 2\pi\frac{a^2}{a^2+x^2}$. En appliquant la transformée de Fourier inverse à cette équation, on obtient $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{a^2}{a^2+\xi^2}\right)(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|}$.

Finalement

$$g(x) = \left(\frac{a}{2}e^{-a|x|} * f\right)(x) = \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|y-x|}f(y)\,dy.$$