

Série d'exercices n° 2 : Dérivation dans  $\mathbb{C}$

**Exercice 1 :**

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par  $f(z) = |z|^2$  et soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

- Montrer que la limite  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$  n'existe pas.
- Montrer que pour tout  $z \neq z_0$  on a  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \bar{z} + z_0 \left( \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \right)$ .
- En déduire que  $f$  n'est pas dérivable en aucun point sauf en  $z = 0$ .

**Exercice 2 :**

Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas dérivables aux points indiqués.

- a)  $f(z) = \bar{z}$ , pour  $z \in \mathbb{C}$  b)  $f(z) = \operatorname{Re} z$ , pour  $z \in \mathbb{C}$ , c)  $f(z) = \operatorname{Im} z$ , pour  $z \in \mathbb{C}$ .

**Exercice 3 :**

Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué.

- a)  $f(z) = (\bar{z} + i)^2$ , sur  $\mathbb{C}$ , b)  $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$ , sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  
c)  $f(z) = \operatorname{Re} \left( \frac{z}{z-1} \right)$ , sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , d)  $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$ , sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 4 :**

Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  de partie réelle  $|z|^2$ .

**Exercice 5 :**

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

- Montrer que la fonction  $f$  vérifie les conditions de Cauchy-Riemann au point  $(0, 0)$ .
- La fonction  $f$  est-elle dérivable au point  $(0, 0)$ ?
- Discuter le résultat.

**Exercice 6 :**

Supposons que  $f$  est holomorphe dans un domaine  $D \subset \mathbb{C}$  et que à chaque point  $z \in D$ , soit  $f(z) = 0$  ou bien  $f'(z) = 0$ . Montrer que  $f$  est constante sur  $D$ .

**Exercice 7 :**

Supposons que  $f$  est une fonction entière de la forme  $f(z) = u(x) + iv(y)$ .

Montrer que  $f$  est un polynôme linéaire.

**Exercice 8 :**

Montrer que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

**Exercice 9 :**

Montrer que la fonction  $u$  définie ci-dessous est harmonique.

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Trouver une fonction  $v$  pour que la fonction  $f = u + iv$  soit holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ .

**Exercice 10 :**

Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes?

$$\textbf{a)} \ f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, \quad \textbf{b)} \ f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)}, \quad \textbf{c)} \ f(z) = \frac{\text{Log}(z-2)}{(z^2+2z+2)^4}.$$