

Série d'exercices n° 0 : Nombres complexes

Exercice 1 :

Écrire les nombres complexes suivants sous forme $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{(2-i)(1+3i)}{2+3i}$, b) $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$, c) $\frac{a+ib}{a-1+ib}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Trouver le module et l'argument principal des nombres complexes suivants :

a) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$, b) $z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$, c) $z = \cos \alpha - i \sin \alpha$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Exercice 3 :

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z = 1 - \sin \alpha + i \cos \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, b) $z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 :

Déterminer les parties réelle et imaginaire de

a) $z = (1+i)^{2k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \beta + i \sin \beta}$, $\alpha, \beta \in]0, \pi[$.

Exercice 5 :

Calculer $i^{\frac{1}{6}}$ et représenter les résultats dans le plan complexe.

Exercice 6 :

Calculer les sommes suivantes : a) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$, b) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$.

Exercice 7 :

Résoudre les équations : a) $(z-1)^1 = 1$, b) $z^4 + 2 = 0$, c) $z^5 - 1 = i$.

Exercice 8 :

Si $\alpha + i\beta$ est racine de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$ où $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n, \alpha, \beta$ sont réels et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\alpha - i\beta$ est aussi racine. Ce résultat est souvent énoncé sous la forme suivante : les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont deux à deux conjuguées.

Exercice 9 :

Si $\operatorname{Im} z > 0$, montrer que $\operatorname{Im} \left(\frac{z}{1+z^2} \right) > 0$ si et seulement si $|z| < 1$.

Exercice 10 :

Montrer que si $z^2 = \bar{z}^2$, alors $\operatorname{Re} z = 0$ ou bien $\operatorname{Im} z = 0$.

Exercice 11 :

Montrer que les nombres z_1, z_2 et z_3 sont alignés si et seulement si $\operatorname{Im} \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \right) = 0$.

Exercice 12 :

Soient z_1 et z_2 deux éléments dans \mathbb{C}^* .

Montrer que si $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ou bien si $\left| |z_1| - |z_2| \right| = |z_1 - z_2|$, alors $z_1 = kz_2$ avec $k > 0$.

Exercice 13 :

Démontrer l'identité $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

En donner une interprétation géométrique.

Exercice 14 :

Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe.

- a)** $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| < 3\}$, **b)** $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| > 3\}$, **c)** $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im} z < 1\}$,
d) $\{z \in \mathbb{C} / |z - 3i| \leq |z - 3|\}$, **e)** $\{z \in \mathbb{C} / |z^2 - z| \leq 1\}$, **f)** $\{z \in \mathbb{C} / |1 - z| \leq 3(1 - |z|)\}$.

Exercice 15 :

Parmi les ensembles suivants, trouver ceux qui sont ouverts, fermés, connexes, bornés, compacts.

- a)** $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z > 0\}$, **b)** $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| \geq 3\}$, **c)** $\{1, i, -2, 1 + 3i\}$, **d)** \mathbb{C} ,
e) $\{z \in \mathbb{C} / |z - 1| < |z + 1|\}$, **f)** $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} / |z - 1| < 1\}$.