



Test de préparation pour l'examen final - 12 mai 2016. Durée : 1h30m

Nom et Prénom : .....

Matricule : .....

20

**Exercice 1 (4 pts.) :**

- a) Soit  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n z^{n-1}}{n!}$ . Montrer que  $f$  est entière et calculer  $f(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .
- b) Soit  $r > 0$ . En utilisant la courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} re^{2i\pi t}, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (4t - 3)r, & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

montrer que  $\int_{-r}^r f(x) dx - i\pi = -i \int_0^\pi e^{ire^{ix}} dx$ .

- c) En déduire la valeur de l'intégrale généralisée  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

**Exercice 2 (5 pts.) :**

Soit  $f$  une fonction entière telle que  $|f(z)| \leq M(1 + |z|^n)$  pour un certain  $M > 0$  et un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Donner plusieurs démonstrations que  $f$  est un polynôme de degré au plus  $n$  :

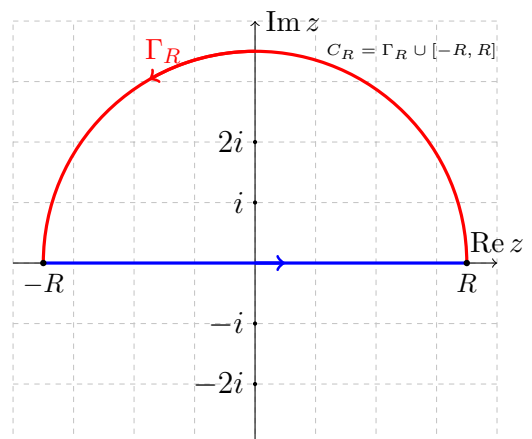
- a) En utilisant une formule intégrale de Cauchy pour  $f^{(n+1)}(z)$ , avec comme contour les cercles de rayon  $R$  centrés en l'origine, ou en  $z$  si l'on veut.
- b) En utilisant les formules de Cauchy pour  $f^{(m)}(0)$ , avec  $m \geq n + 1$ .
- c) En appliquant le théorème de Liouville à  $\frac{f(z) - P(z)}{z^{n+1}}$  avec  $P$  le polynôme de McLaurin-Taylor à l'origine à l'ordre  $n$ .

**Exercice 3 (5 pts.) :**

On considère la fonction  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ .

- a) Trouver les résidus de  $f(z)$  en **tous les pôles**.
- b) Par application du théorème des résidus calculer  $\int_{C_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz$ , où  $C_R$  désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du demi cercle  $\Gamma_R$  et du segment  $[-R, R]$ , décrit dans le sens direct.

- c) En déduire  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$ .



**Exercice 4 (6 pts.) :**

Soit  $a \in \mathbb{R}$  un paramètre réel non nul. Le but de l'exercice est de trouver une formule simple pour

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}. \text{ On considère la fonction } z \mapsto f(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{(z^2 + a^2) \sin(\pi z)}.$$

a) Montrer que  $f$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , avec des pôles simples en  $\mathbb{Z} \cup \{-ai, ai\}$ .

b) Calculer  $\text{Res}(f, n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{Res}(f, -ai)$  et  $\text{Res}(f, ai)$ .

c) Soit  $N$  un entier naturel strictement supérieur à  $|a|$ , et soit  $R = N + \frac{1}{2}$ . On considère la courbe  $\gamma_R(t) = R e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Décrire cette courbe et donner l'indice de chacun des pôles de  $f$  par rapport à  $\gamma_R$ .

d) En déduire que

$$\sum_{n=-N}^N \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \text{Ch}(\pi a)}{a \text{Sh}(\pi a)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz.$$

e) Montrer que

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi^2 R}{R^2 - a^2} \sup_{|z|=R} \left\{ \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right\}.$$

f) On admet que  $\sup_{|z|=R} \left\{ \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right\}$  est borné, pour tout  $R = N + \frac{1}{2}$ , par une constante  $M$  indépendante

de  $N$ . En déduire une formule simple pour  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ .

g) Application :

Calculer la limite quand  $a$  tend vers 0 de  $\frac{\pi \text{Ch}(\pi a)}{a \text{Sh}(\pi a)} - \frac{1}{a^2}$  et en déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .