Série d'exercices n° 4 : Fonctions Analytiques

Exercice 1 :

Déterminer le domaine de convergence des séries

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} n! z^n, \qquad \textbf{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}.$$

Exercice 2 :

Que peut-on dire de la convergence uniforme des séries suivantes dans les régions indiquées?

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}, |z| \leq 1; \ \textbf{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+z^2}, 1 < |z| < 2; \ \textbf{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nz)}{n^3}, |z| \leq 1; \ \textbf{d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^n}, |z| < 1.$$

Exercice 3 :

Déterminer le rayon de convergence et la nature pour $|z| = R$ des séries entières suivantes :

$$\textbf{a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right) z^n, \qquad \textbf{b)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n, \qquad \textbf{c)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} z^n, a \neq 0, \qquad \textbf{d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n+n} z^{3n-1}.$$

Exercice 4 :

Soit $f(z) = \operatorname{Log}(1+z)$, où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour $z = 0$.

a) Développer f en série de Taylor au voisinage de $z = 0$.

b) Déterminer le domaine de convergence de la série de **(a)**.

c) Développer $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$.

Exercice 5 :

Soit f une fonction définie et continue sur une courbe fermée simple C. Montrer que la fonction g définie par $g(z) = \displaystyle\int_C \frac{f(w)}{w-z} dw$ est analytique en tout point intérieur à C.

Exercice 6 :

Soit f une fonction analytique dans le disque $|z| < 1$. Trouver une condition suffisante pour que la fonction $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z}$ soit analytique dans $|z| < 1$.

Exercice 7 :

a) Soit $z \mapsto S_n(z)$ continue continue sur $|z| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\{S_n\}$ converge uniformément vers S dans $|z| = 1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \left|S_n\left(e^{it}\right)\right|^2 dt = \int_0^{2\pi} \left|S\left(e^{it}\right)\right|^2 dt$.

b) Si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est analytique dans $|z| \leq 1$, montrer que $\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2$.

Indication. Noter que si $S_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, alors

$$|S_n(z)|^2 = S_n(z)\overline{S_n(z)} = (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n)\left(\overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \cdots + \overline{a_n z^n}\right) \text{ et } \int_{|z|=1} z^n \overline{z}^m \tfrac{dz}{z} = 0, n \neq m.$$

Exercice 8 :

Déterminer dans les cas suivants les fonctions analytiques sur le disque ouvert $|z| < 1$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, **a)** $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$, **b)** $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, **c)** $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{-1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n}$, **c)** $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$.

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur le disque ouvert $|z| < 1$ par $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$. Montrer que f est analytique sur $|z| < 1$. Quels sont ses zéros sur le disque $|z| < 1$? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 10 :

Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ et $Z(f) = \{z \in C \text{ tel que } f(z) = 0\}$ l'ensemble de ses zéros.

a) Donner un exemple de fonction non constante telle que $Z(f) = \emptyset$.

b) Donner un exemple de fonction non constante telle que $Z(f)$ est infini.

c) Montrer que pour tout compact K, $Z(f) \cap K$ est fini.

d) Montrer que $Z(f)$ est dénombrable.

Exercice 11 :

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$. Soient f et g deux fonctions analytiques sur D telles que $f(z)\,g(z) = 0$ pour tout $z \in D$. Montrer que f ou g est identiquement nulle.

Exercice 12 :

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ et $L = \{z_0 + tb,\ t \in \mathbb{R}\}$, où $b \in \mathbb{C}^*$. Soit f une fonction continue sur D et analytique sur $D \setminus L$. Montrer que f est analytique sur D.

Exercice 13 :

Soit f une fonction analytique sur $H^+ = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > 0\}$, continue et bornée sur $\overline{H^+} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ et ne prenant que des valeurs réelles sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 14 :

Soit f une fonction analytique sur le disque ouvert $|z| < r, r > 1$ et ne prenant que des valeurs réelles sur le cercle unité $|z| = 1$. Que peut-on dire de f ?