

Test n°2 - 07 décembre 2014. Durée : 30 minutes

Nom : Matricule :

Prénom : Groupe :

Exercice 1 (5,5 pts.) : Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

$$1) f(x, y) = x^3 + y^3, \quad 2) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 - 2x - 2y - 4z.$$

Réponse.

$$1) f(x, y) = x^3 + y^3 :$$

Il est clair que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 . Un simple calcul donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

Les points critiques de f sont les solutions du système $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \right\}$

i.e. $\{3x^2 = 0, 3y^2 = 0\}$. Ce système admet une unique solution qui est $s = (0, 0)$.

En ce point critique on a $p = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$, $q = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$ et donc $pr - q^2 = 0$.

Alors le théorème des conditions suffisantes d'existence d'un extremum ne s'applique pas.

On remarque que pour $t > 0$ au voisinage de 0 :

$$f(t, 0) = t^3 > 0 = f(0, 0) \quad \text{et} \quad f(-t, 0) = -t^3 < 0 = f(0, 0).$$

Par conséquent le point critique $s = (0, 0)$ ne figure pas un extremum pour la fonction f .

$$2) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 - 2x - 2y - 4z :$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^3 et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 4z^3 - 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 12z^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = 0.$$

Les points critiques de f sont les solutions du système $\{2x - 2 = 0, 2y - 2 = 0, 4z^3 - 4 = 0\}$.

D'où la fonction f possède un seul point critique $s = (1, 1, 1)$.

La matrice hessienne de f en $s = (1, 1, 1)$ est

$$H(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 12$. Comme ils sont tous strictement positives, alors f admet un minimum local au point $s = (1, 1, 1)$.

=====

Exercice 2 (3,5 pts.) : Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f admet un minimum local où

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3ax - 2y.$$

=====

Réponse.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2,$$

$$p = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, \quad q = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

Les points critiques de f sont les solutions du système $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \right\}$

i.e. $\{3x^2 - 3a = 0, 2y - 2 = 0\}$. Si $a < 0$, la fonction f n'a aucun point critique.

Si $a = 0$, la fonction f admet un seul point critique $s = (0, 1)$. En ce point critique on a

$pr - q^2 = 0$ et la fonction f n'a aucun extremum car pour $t > 0$, $f(t, 1) = t^3 - 1 > -1 = f(0, 1)$

et $f(-t, 1) = -t^3 - 1 < -1 = f(0, 1)$.

Si $a > 0$, la fonction f admet deux points critiques $s_1 = (-\sqrt{a}, 1)$ et $s_2 = (\sqrt{a}, 1)$.

En $s_1 = (-\sqrt{a}, 1)$ on a $pr - q^2 = -12\sqrt{a} < 0$. Donc la fonction f n'admet en s_1 ni maximum ni minimum local, mais un point selle.

En $s_2 = (\sqrt{a}, 1)$ on a $pr - q^2 = 12\sqrt{a} > 0$. Donc la fonction f admet un minimum local au point $s_2 = (\sqrt{a}, 1)$.

On en conclut que f possède un minimum local si et seulement si $a > 0$.

=====

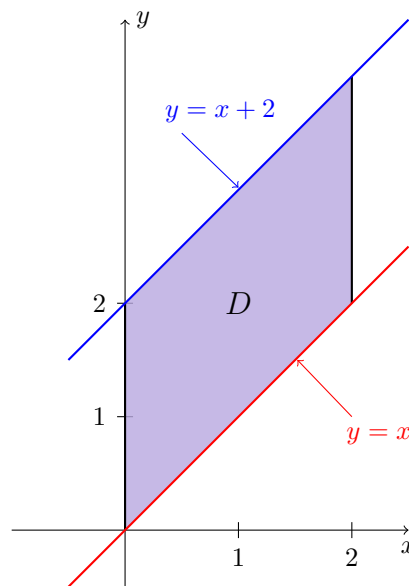
Exercice 3 (6 pts.) : Soit le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y - x \leq 2\}$.

- 1) Dessiner le domaine D . 2) Déterminer les bornes de l'intégrale $\iint_D f(x, y) dx dy$.
3) En déduire l'aire de D .
- =====

Réponse.

- 1) Le domaine d'intégration D s'exprime sous la forme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x + 2\}.$$



- 2) En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_x^{x+2} f(x, y) dy \right) dx.$$

- 3) Lorsque f est la fonction constante qui vaut 1, l'intégrale $I = \iint_D 1 dx dy = \text{Aire}(D)$ représente l'aire, ou la surface du domaine D .

Par conséquent

$$\text{Aire}(D) = \int_0^2 \left(\int_x^{x+2} 1 dy \right) dx = \int_0^2 ([y]_x^{x+2}) dx = \int_0^2 2 dx = [2x]_0^2 = 4.$$