



Nom : ..... Matricule : .....

Prénom : .....

=====

**Exercice 1 (4 pts.)** : Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^2 + 1 + xe^y - y$ .

- a) Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de  $f$  au voisinage du point  $(0, 0)$ .
  - b) Montrer que  $f(x, y) = 0$  définit implicitement  $y$  en fonction de  $x$  au voisinage du point  $(0, 1)$ .
  - c) Former le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction  $\varphi : x \mapsto y(x)$ .
- =====

Réponse.

=====

**Exercice 2 (4 pts.) :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- a) En posant  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , exprimer  $\frac{\partial f}{\partial r}$  en fonction de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- b) En déduire l'expression de  $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial y}$ .
- c) Déterminer toutes les fonctions qui vérifient  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- =====

**Réponse.**

=====

**Exercice 3 (3,5 pts.) :**

Déterminer les extrema locaux de la fonction définie par  $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4$ .

=====

**Réponse.**

=====

**Exercice 4 (4,5 pts.) :** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$  et  $\partial D$  est son bord orienté.

Calculer puis comparer les intégrales suivantes.

**a)**  $I_1 = \iint_D (2x - 2y) \, dx \, dy,$       **b)**  $I_2 = \int_{\partial D} (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy.$

=====

**Réponse.**

=====

**Exercice 5 (4 pts.) :** On considère l'équation différentielle :  $y' = 1 + t^2 + \cos y$ .

- a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale qui vérifie  $y(0) = 0$ .
- b) Montrer que  $y$  est une fonction impaire. c) Étudier la monotonie et le signe de  $y$ .
- =====

**Réponse.**