



Examen final - 10 <sup>U S T H B</sup> janvier 2016. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom et Prénom : .....

Matricule : .....

20

**Exercice 1 (4 pts.) :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- a) Calculer les dérivées partielles premières  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .
- b) Calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ , puis discuter le résultat.

Réponse.

**Exercice 2 (4,5 pts.) :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ .

- Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de  $f$  au voisinage du point  $(1, 1)$ .
- Montrer que  $f(x, y) = 0$  définit implicitement  $y$  en fonction de  $x$  au voisinage du point  $(0, -1)$ .
- Déterminer les extrema locaux de la fonction  $f$ .

Réponse.

**Exercice 3 (5 pts.)** : Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , considérons le quart de disque  $D_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2, x \geq 0, y \geq 0\}$  et

le carré  $C_n = \{0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}$ .

a) En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, calculer les intégrales

$$J_n = \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \text{ et } J_{2n} = \iint_{D_{2n}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

b) En déduire les limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{2n}$ .

c) Considérons les intégrales  $K_n = \iint_{C_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$  et  $I_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$ . Vérifier que  $K_n = (I_n)^2$ .

d) D'après un dessin de  $D_n, C_n$  et  $D_{2n}$ , expliquer pourquoi  $J_n \leq K_n \leq J_{2n}$ .

e) En déduire l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**Réponse.**

**Exercice 4 (3 pts.) : 1)** En utilisant le changement en coordonnées sphériques, calculer les volumes :

a)  $V_1 = \iiint_{D_1} dx dy dz$ ,  $D_1$  est la demi-boule supérieure de centre  $(0, 0, 0)$  et de rayon 3.

b)  $V_2 = \iiint_{D_2} dx dy dz$ ,  $D_2$  est la demi-boule inférieure de centre  $(1, 0, 0)$  et de rayon 1.

2) En déduire le volume du solide

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0) \text{ et } ((x - 1)^2 + y^2 + z^2 \geq 1, z \leq 0)\}.$$

**Réponse.**

b) Montrer que  $y$  est une fonction impaire. c) Étudier la monotonie et le signe de  $y$ .