



Série d'exercices n° 1 : Limites et continuité

Exercice 1 :

Déterminer le domaine de définition D_f et l'image $\text{Im } f$ de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = \left(\frac{xy}{z}, \sin(xyz) \right)$.

Exercice 2 :

Étudier l'existence d'une limite en $(0, 0)$ pour les fonctions suivantes :

1) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ 2) $f(x, y) = \frac{1 - \cos(xy)}{y^2}$ 3) $f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2}$ 4) $f(x, y) = \frac{2x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

5) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$ 6) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \alpha > 0.$

Exercice 3 :

Étudier l'existence d'une limite au point indiqué pour les fonctions suivantes :

1) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x + y + z}$ en $(0, 0, 0)$ 2) $f(x, y, z) = \frac{x + y}{x^2 - y^2 + z^2}$ en $(2, -2, 0)$.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geq y^2 \\ \frac{2x}{y} & \text{si } |x| < y^2 \text{ et } y \neq 0 \\ -2y & \text{si } x \leq -y^2 \end{cases}.$$

Étudier la continuité de f sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 5 :

Étudier la continuité sur \mathbb{R}^2 des fonctions définies dans l'exercice 2.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^{2\alpha}}{|x|^\alpha + |y|^{2\alpha}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f soit continue en $(0, 0)$.