

Série d'exercices n° 2 : Fonctions différentiables

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \alpha > 0.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f soit

1) continue en $(0, 0)$. 2) différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 2 : Étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières et la différentiabilité pour les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & 2) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{|x|-y} & \text{si } y \neq |x| \\ 0 & \text{si } y = |x| \end{cases} \\ 3) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & 4) f(x, y) &= \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 4 :

Calculer $d_{(1,2)}f(x, y)$ et $d_{(2,3,4)}g(x, y, z)$ où $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$ et $g(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ les fonctions définies par

$$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) \text{ et } g(x, y) = (x + y, x - y).$$

- 1) Calculer le gradient de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 2) Calculer la matrice jacobienne de g en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 3) En déduire la matrice jacobienne de $f \circ g$ en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et donner l'expression de $D(f \circ g)(x, y)(h, k)$.