

Série d'exercices n° 3 : Théorèmes généraux du calcul différentiel

Exercice 1 :

On dit qu'une fonction f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est harmonique sur U si $f \in \mathcal{C}^2(U)$ et

$$\Delta f(x) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0 \text{ pour tout } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U.$$

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \text{Log}(x^2 + y^2)$

est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Comparer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Exercice 3 :

À l'aide du changement $\xi = x + \lambda_1 y$, $\eta = x + \lambda_2 y$ transformer l'équation

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad b^2 - ac > 0,$$

en une équation de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Exercice 4 :

Écrire le développement de Taylor à l'ordre 3 au voisinage du point a pour f .

$$1) f(x, y) = \sin x \sin y, \quad a = (0, 0),$$

$$2) f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4, \quad a = (1, 1, 1).$$

Exercice 5 :

Étudier l'existence des extrema locaux des fonctions suivantes :

$$1) f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad 2) f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy, \quad 3) f(x, y) = (x - y)e^{xy},$$

$$4) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz, \quad 5) f(x, y, z) = x^4 + y^4 + 3z^3 - 4x - 4y - z.$$

Exercice 6 :

Montrer que la relation $f(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point (a, b) et former le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de a de la fonction $\varphi : x \mapsto y(x)$.

$$1) f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1, (a, b) = (0, 1) \quad 2) f(x, y) = e^{x+y} + y - 1, (a, b) = (0, 0).$$

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = y^5 + (x^2 + 1)y + 1$.

Montrer que la relation $f(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $\varphi : x \mapsto y(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - xz - x + y - 2z + 1$.

Montrer que la relation $f(x, y, z) = 0$ définit implicitement z en fonction de (x, y) au voisinage du point $(0, 0, 1)$ et former le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $(0, 0)$ de la fonction $\varphi : (x, y) \mapsto z(x, y)$.

Exercice 9 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^4 + z^4 + y^2 - 2x^2 - 2z^2$.

- 1) Déterminer les extrema de f .
- 2) Déterminer les extrema de f sachant que x, y, z sont liées par la relation $x + y + z = 0$.

Exercice 10 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = xyz$.

- 1) Montrer que la restriction de f à l'ensemble

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0\}$$

admet un minimum et un maximum.

- 2) Déterminer les points où f atteint ses extrema.

Exercice 11 :

Déterminer le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - z$ sur l'ensemble $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.