

Série d'exercices n° 4 : Intégration des fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 : Soit $f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que $\int_a^b \left(\int_a^y f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_x^b f(x, y) dy \right) dx$.

Indication. Calculer l'intégrale de f par deux méthodes différentes sur un ensemble convenable.

Exercice 2 : Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ soient continues sur $[a, b] \times [c, d]$, et soient $x \mapsto u(x)$

et $x \mapsto v(x)$ deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit les fonctions F et G par $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ et $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy$ et

1) Montrer la règle de Leibniz suivante : $F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$.

Indication. Noter que $\int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx = f(x, y) - f(a, y)$.

2) Montrer que $G'(x) = f(x, v(x))v'(x) - f(x, u(x))u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$.

Indication. Considérer la fonction $H(u, v, x) = \int_u^v f(x, y) dy$ puis utiliser la règle de dérivation des fonctions composées.

Exercice 3 : Dessiner le domaine D et déterminer les bornes de l'intégrale $\iint_D f(x, y) dx dy$ dans les cas

suivants. 1) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

2) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3 \leq x \leq 5, 1 \leq 3x - 2y \leq 4\}$, 3) $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y, y \leq 4 - x^2\}$,

4) $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$, 5) $D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$,

6) D_6 est un parallélogramme de sommets $B_1 = (1, 2)$, $B_2 = (2, 4)$, $B_3 = (2, 1)$ et $B_4 = (1, -1)$,

7) D_7 est un triangle dont les sommets sont $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (1, 2)$ et $B_3 = (2, 1)$,

8) D_8 est le domaine délimité par les courbes d'équations $y \geq 0$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ et $y = x + 1$.

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes.

1) $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, 1 \leq y \leq 2, xy \leq 1\}$,

2) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$,

3) $\iint_D (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4, x + y + 2 \leq 0\}$,

4) $\iint_D |x^2 - y^2| dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 1\}$,

5) $\iint_D (x + y) dx dy$, D délimité par les courbes $2x + y = 2$, $2x + y = 4$, $x - y = -2$ et $x - y = 1$.

Exercice 5 : Calculer le volume délimité par les surfaces indiquées.

1) $z = 0$, $y + z = 1$ et $y = x^2$, 2) $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$ et $z = x^2$.

Exercice 6 : Changer l'ordre des bornes d'intégration dans ce qui suit.

$$1) I_1 = \int_0^1 dy \int_{y^2-4}^5 f(x, y) dx, \quad 2) I_2 = \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y) dy, \quad 3) I_3 = \int_1^3 dy \int_{y^2}^{y+9} f(x, y) dx.$$

Exercice 7 :

Transformer les intégrales suivantes en coordonnées polaires et déterminer les bornes d'intégration.

$$1) I_1 = \int_0^2 dx \int_0^x g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) dy, \quad 2) I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy,$$

$$3) I_3 = \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 g\left(\frac{y}{x}\right) dx, \quad 4) I_4 = \int_{-1}^1 dx \int_{-x}^x f(x, y) dy.$$

Exercice 8 : En utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$, transformer l'intégrale

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$$

Exercice 9 : Calculer les intégrales suivantes.

$$1) \iint_D \frac{1}{x^2 + xy + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\},$$

$$2) \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Exercice 10 : Déterminer les bornes de l'intégrale $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ dans les cas suivants.

$$1) D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$2) D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\},$$

$$3) D_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\},$$

$$4) D_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 1\}.$$

Exercice 11 : Calculer l'intégrale $\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$ où D est le solide de sommets $B_1 = (1, 2, 0)$,

$$B_2 = (1, -2, 0), B_3 = (0, 0, 3) \text{ et } B_4 = (0, 0, -3).$$

Exercice 12 : Calculer le volume délimité par les surfaces indiquées.

$$1) x = 0, y = 0, z = 0 \text{ et } x + y + z = 1, \quad 2) z = 0, x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x + y + z = 3,$$

$$3) x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x^2 + z^2 = 1.$$

Exercice 13 : Calculer les intégrales suivantes.

$$1) \iiint_D z^2 dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z\},$$

$$2) \iiint_D (x + y + z)^2 dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 2z\},$$

$$3) \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq x\}.$$