

Nom : ..... Matricule : ..... Forme B

Prénom : ..... Groupe : .....

Exercice 1 (4 points) : a) Calculer  $\text{Log}(1+i)$ . b) Résoudre l'équation  $e^z + 2 = 0$ .

Réponse.

$$\text{a) } \text{Log}(1+i) = \ln(|1+i|) + i\text{Arg}(1+i) \text{ (0,5 pt.)}$$

$$= \ln \sqrt{2} + i \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}. \text{ (1 pt.)}$$

$$\text{b) } \text{L'équation } e^z + 2 = 0 \text{ est équivalente à } e^z = -2. \text{ (0,5 pt.)}$$

Si  $w = e^z$  on a  $z = \text{Log } w$ . On obtient alors  $z = \text{Log}(-2)$ , (0,5 pt.) et donc

$$z \stackrel{(0,5 \text{ pt.})}{=} \ln|-2| + i\text{Arg}(-2) \stackrel{(1 \text{ pt.})}{=} \ln 2 + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

**Autre méthode.** En écrivant  $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ , on trouve le même résultat en égalant les parties réelles et imaginaires.

Exercice 2 (2,5 points) : Déterminer  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  telles que  $f(z) = \bar{z}^2 + i z = u + iv$ .

Réponse. On a

$$f(z) = \bar{z}^2 + i z \stackrel{(0,5 \text{ pt.})}{=} (x - iy)^2 + i(x + iy)$$

$$\stackrel{(1 \text{ pt.})}{=} x^2 - y^2 - 2ixy + ix - y \stackrel{(1 \text{ pt.})}{=} x^2 - y^2 - y + i(x - 2xy).$$

$$\text{Alors } u(x, y) = x^2 - y^2 - y \text{ et } v(x, y) = x - 2xy.$$

Exercice 3 (5 pts): Examiner si la fonction  $f(z) = -y + e^x \cos y + i(x + e^x \sin y)$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

Réponse.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  sont nécessaires et suffisantes pour que  $f = u + iv$  soit holomorphe.

On a  $u = -y + e^x \cos y$  et  $v = x + e^x \sin y$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \text{ (1 pt.) } \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \text{ (1 pt.) } \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1 - e^x \sin y, \text{ (1 pt.) } \frac{\partial v}{\partial x} = 1 + e^x \sin y \text{ (1 pt.) } \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction  $f$  est donc holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . (1 pt.)

**Exercice 4 (3,5 points) :** Calculer  $\int_C (z^3 + 2\bar{z}) dz$  le long du cercle  $|z| = 2$  de  $2i$  à  $-2$  dans le sens direct.

**Réponse.**

L'arc de  $2i$  à  $-2$  du cercle  $|z| = 2$  peut être paramétré par  $z = 2e^{it}$ , (0,5 pt.)  $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ . (0,5 pt.)

Les points  $2i$  et  $-2$  sur  $C$  correspondant à  $\frac{\pi}{2}$  et à  $\pi$ . L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\begin{aligned} \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ \underbrace{(2e^{it})^3}_{(0,5 \text{ pt.})} + 4e^{-it} \right\} \underbrace{(2ie^{it} dt)}_{(0,5 \text{ pt.})} &= \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2ie^{it} (8e^{3it} + 4e^{-it}) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \underbrace{(16ie^{4it} + 8i)}_{(0,5 \text{ pt.})} dt = \underbrace{[4e^{4it} + 8it]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}}_{(0,5 \text{ pt.})} \end{aligned}$$

$$(0,5 \text{ pt.}) = 4e^{4i\pi} + 8i\pi - (4e^{2i\pi} + 4i\pi) = 4i\pi.$$

**Exercice 5 (supplémentaire) :**

À l'aide du théorème de Cauchy, calculer  $\oint_C z^2 dz$  où  $C$  désigne le cercle  $|z| = 1$ .

**Réponse.** (+0,5 pt. si l'exercice est parfaitement fait.)

Le cercle  $|z| = 1$  est une courbe fermée simple et la fonction  $f(z) = z^2$  est holomorphe dans  $|z| \leq 1$ , donc d'après le théorème de Cauchy  $\oint_C z^2 dz = 0$ .

**Nantisement :** Sur mon honneur, je n'ai ni donné, ni reçu de l'aide sur ce test. Signé.....