

Série d'exercices pour vous préparer à l'épreuve du TD (interrogation 2)

Exercice 1 :

Développer en série de Laurent autour de leurs points singuliers les fonctions suivantes, et préciser la nature des points singuliers.

(a) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, (b) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les pôles et les résidus en ces pôles.

(a) $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}$, (b) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, (c) $f(z) = \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$.

Réponse. (a) $\text{Res}(f, -1) = \frac{1}{3}$, $\text{Res}(f, 2) = \frac{5}{3}$. (b) $\text{Res}(f, 0) = 1$. (c) $\text{Res}(f, 0) = 2$, $\text{Res}(f, -1+i) = -\frac{1}{2}(1-3i)$, $\text{Res}(f, -1-i) = -\frac{1}{2}(1+3i)$

Exercice 3 :

Appliquer le théorème des résidus pour calculer $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z+4)} dz$ où C est le rectangle des sommets $2, 2+2i, 2i-2$ et -2 .

Exercice 4 :

Calculer $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$ où C désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment, $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ décrit dans le sens direct.

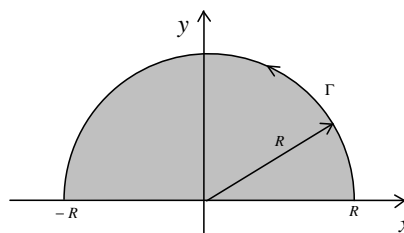


Figure 1.

En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$.

Exercice 5 :

Calculer $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)^2} dz$ où C est le contour de l'exercice 4, voir Figure 1 ci-dessus.

En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$.

Exercice 6 :

Calculer (a) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{4 + \sin \theta} d\theta$, (b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$.