

Série d'exercices pour vous préparer à l'épreuve du TD (interrogation)

Exercice 1 :

a) Déterminer toutes les valeurs de $(1+i)^i$ et $1^{\sqrt{2}}$.

b) Trouver les valeurs de $4 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{3} i \right)$ et $\operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2} i \right)$.

Solution.

$$\text{a) } (1+i)^i = e^{i \operatorname{Log}(1+i)} = e^{i(\ln|1+i| + i \arg(1+i))} = e^{i(\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} = e^{i \ln \sqrt{2} - (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\operatorname{Log} 1} = e^{\sqrt{2}(\ln|1| + i \arg 1)} = e^{\sqrt{2}(0 + i2k\pi)} = e^{i2\sqrt{2}k\pi} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{b) } 4 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{3} i \right) = 4 \frac{e^{\frac{\pi}{3} i} - e^{-\frac{\pi}{3} i}}{2} = 2 \left\{ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} - \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right\} = 4i \sin \frac{\pi}{3} = 2i\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2} i \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2} i} + e^{-\frac{\pi}{2} i}}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right\} = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Exercice 2 :

Déterminer $u(x, y)$ et $v(x, y)$ telles que **a)** $\operatorname{sh}(2z) = u + iv$, **b)** $ze^z = u + iv$.

Solution.

$$\text{a) } \operatorname{sh}(2z) = \operatorname{sh}(2x + 2iy) = \operatorname{sh}(2x) \operatorname{ch}(2iy) + \operatorname{ch}(2x) \operatorname{sh}(2iy)$$

En notant que $\operatorname{ch}(2iy) = \cos(2y)$ et $\operatorname{sh}(2iy) = i \sin(2y)$ on obtient

$$\operatorname{sh}(2z) = \operatorname{sh}(2x) \cos(2y) + i \operatorname{ch}(2x) \sin(2y).$$

b)

$$ze^z = (x + iy) e^{x+iy} = (x + iy) e^x (\cos x + i \sin x)$$

$$= e^x (x \cos x - y \sin x) + i e^x (x \sin x + y \cos x).$$

Exercice 3 :

À l'aide de la définition déterminer la dérivée de $f(z) = iz^2$ au point $z_0 = 1 + i$.

Solution. Par définition, la dérivée en z_0 si elle existe est

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{iz^2 - iz_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{i(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 2iz_0 = -2 + 2i.$$

La limite existe en $z_0 = 1 + i$, donc la dérivée de f en $1 + i$ est donnée par $f'(1 + i) = -2 + 2i$.

=====

Exercice 4 :

Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes dans \mathbb{C} .

a) $(x \cos y - y \sin y) e^x + i (x \sin y + y \cos y) e^x$, **b)** $x^2 - y^2 + x + i (2xy - y)$.

Solution.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

a) On a $(x \cos y - y \sin y) e^x$ et $v = (x \sin y + y \cos y) e^x$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + (x \cos y - y \sin y) e^x = (\cos y + x \cos y - y \sin y) e^x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (x \cos y + \cos y - y \sin y) e^x \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (-x \sin y - \sin y - y \cos y) e^x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + (x \sin y + y \cos y) e^x \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur \mathbb{C} .

b) On a $u = x^2 - y^2 + x$ et $v = 2xy - y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La première équation de Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite, alors la fonction f n'est pas holomorphe sur \mathbb{C} .

=====

Exercice 5 :

a) Montrer que la fonction $u = 2x(1 - y)$ est harmonique.

b) Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe.

c) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z .

Solution.

a) On a $u = 2x(1 - y) = 2x - 2xy$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

On obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.

b) Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les équations de Cauchy-Riemann.

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 2y, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-2x) = 2x. \quad (2)$$

En intégrant l'équation (1) par rapport à y , il vient

$$v = 2y - y^2 + C_1(x), \quad (3)$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution de (3) dans (2) on obtient

$$\frac{d}{dx}C_1(x) = 2x \quad \rightarrow \quad C_1(x) = x^2 + c,$$

où c désigne une constante. D'où de (3)

$$v = 2y - y^2 + x^2 + c.$$

c) On a $f(z) = u + iv = 2x(1 - y) + i(2y - y^2 + x^2 + c)$.

En remplaçant x par $\frac{z + \bar{z}}{2}$ et y par $\frac{z - \bar{z}}{2i}$ on obtient

$$\begin{aligned} f(z) &= (z + \bar{z}) \left(1 - \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + i \left(\frac{z - \bar{z}}{i} - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + c \right) \\ &= z + \bar{z} + \frac{1}{2}i(z^2 - \bar{z}^2) + z - \bar{z} + \frac{1}{4}i(z^2 + \bar{z}^2 - 2z\bar{z}) + \frac{1}{4}i(z^2 + \bar{z}^2 + 2z\bar{z}) + ic \\ &= 2z + i(z^2 + c). \end{aligned}$$

Exercice 6 :

Calculer $\oint_C (x^2 - iy^2) dz$ le long

- a) de la parabole $y = 2x^2$ de $(1, 2)$ à $(2, 8)$,
- b) des segments de droite joignant $(1, 2)$ à $(1, 8)$ et $(1, 8)$ à $(2, 8)$,
- c) du segment de droite joignant $(1, 2)$ à $(2, 8)$.

Solution.

a) En remplaçant y par $2x^2$, l'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\begin{aligned} \oint_C (x^2 - iy^2) dz &= \int_{x=1}^2 \left\{ x^2 - i(2x^2)^2 \right\} \{dx + id(2x^2)\} = \int_{x=1}^2 (x^2 - 4ix^4) (dx + 4ixdx) \\ &= \int_1^2 (x^2 - 4ix^4) (1 + 4ix) dx = \int_1^2 \{x^2 + 16x^5 + i(4x^3 - 4x^4)\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{16}{6}x^6 + i \left(x^4 - \frac{4}{5}x^5 \right) \right]_1^2 = \frac{511}{3} - \frac{49}{5}i. \end{aligned}$$

b) Le long du segment de droite d'extrémités $(1, 2)$ et $(1, 8)$, $x = 1$, $dx = 0$ et l'intégrale vaut

$$\int_{y=2}^8 (1^2 - iy^2) (0 + idy) = \int_2^8 (i + y^2) dy = \left[iy + \frac{y^3}{3} \right]_2^8 = 168 + 6i.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(1, 8)$ et $(2, 8)$, $y = 8$, $dy = 0$ et l'intégrale vaut

$$\int_{x=1}^2 (x^2 - i8^2) (dx + i0) = \int_{x=1}^2 (x^2 - 64i) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 64ix \right]_1^2 = \frac{7}{3} - 64i.$$

Le résultat demandé est donc $= 168 + 6i + \frac{7}{3} - 64i = \frac{511}{3} - 58i$.

c) Une équation de la droite joignant $(1, 2)$ à $(2, 8)$ est $y = 6x - 4$. D'où la valeur de l'intégrale est

$$\begin{aligned} \int_{x=1}^2 (x^2 - i(6x - 4)^2) (dx + id(6x - 4)) &= \int_{x=1}^2 (x^2 - i(6x - 4)^2) (1 + 6i) dx \\ &= \left[(1 + 6i) \left(\frac{x^3}{3} - \frac{i}{18} (6x - 4)^3 \right) \right]_1^2 = \frac{511}{3} - 14i \end{aligned}$$

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant $x = \frac{1}{6}(y + 4)$.

Exercice 7 :

Calculer $\oint_C z^2 dz$ le long du carré de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

Solution.

Le long du segment de droite d'extrémités $(0, 0)$ et $(1, 0)$, $y = 0$, $dy = 0$; et l'intégrale vaut

$$\int_{x=0}^1 (x + i0)^2 (dx + i0) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(1, 0)$ et $(1, 1)$, $x = 1$, $dx = 0$; et l'intégrale vaut

$$\int_{y=0}^1 (1 + iy)^2 (0 + idy) = \int_{y=0}^1 i(1 + iy)^2 dy = \left[\frac{1}{3} (1 + iy)^3 \right]_0^1 = -1 + \frac{2}{3}i.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(1, 1)$ et $(0, 1)$, $y = 1$, $dy = 0$; et l'intégrale vaut

$$\int_{x=1}^0 (x + i1)^2 (dx + i0) = \int_{x=1}^0 (x + i1)^2 dx = \left[\frac{1}{3} (x + i)^3 \right]_1^0 = \frac{2}{3} - i.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(0, 1)$ et $(0, 0)$, $x = 0$, $dx = 0$; et l'intégrale vaut

$$\int_{y=1}^0 (0 + iy)^2 (0 + idy) = \int_{y=1}^0 -iy^2 dy = \left[-i \frac{y^3}{3} \right]_1^0 = \frac{1}{3}i.$$

Le résultat demandé est donc $= \frac{1}{3} + \left(-1 + \frac{2}{3}i \right) + \left(\frac{2}{3} - i \right) + \frac{1}{3}i = 0$.

Autre méthode. Le carré de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ est une courbe fermée et la fonction $f(z) = z^2$ est holomorphe dans \mathbb{C} , donc d'après le théorème de Cauchy $\oint_C z^2 dz = 0$.

=====

Exercice 8 :

Calculer $\oint_C (z^2 + 3z) dz$ le long

- a) du cercle $|z| = 2$ de $(2, 0)$ à $(0, 2)$ dans le sens direct,
- b) du segment de droite joignant $(2, 0)$ à $(0, 2)$,
- c) du contour polygonal formé par les segments de droite joignant $(2, 0)$ à $(2, 2)$ et $(2, 2)$ à $(0, 2)$.

Solution.

a) L'arc de $(2, 0)$ à $(0, 2)$ du cercle $|z| = 2$ peut être paramétré par $z = 2e^{it}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Les points $(2, 0)$ et $(0, 2)$ de l'arc correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$. L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ (2e^{it})^2 + 3(2e^{it}) \right\} d(2e^{it}) &= \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \{4e^{2it} + 6e^{it}\} 2ie^{it} dt = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} i(8e^{3it} + 12e^{2it}) dt \\ &= \left[\frac{8}{3}e^{3it} + 6e^{2it} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{44}{3} - \frac{8}{3}i. \end{aligned}$$

b) Une équation de la droite joignant $(2, 0)$ à $(0, 2)$ est $y = -x + 2$. En remplaçant y par $-x + 2$, on obtient

$$\begin{aligned} \oint_C (z^2 + 3z) dz &= \int_{x=0}^2 \left\{ (x + i(-x + 2))^2 + 3(x + i(-x + 2)) \right\} (dx + i d(-x + 2)) \\ &= \int_{x=0}^2 (1 - i) \left\{ ((1 - i)x + 2i)^2 + 3((1 - i)x + 2i) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}((1 - i)x + 2i)^3 + \frac{3}{2}((1 - i)x + 2i)^2 \right]_0^2 = -\frac{44}{3} - \frac{8}{3}i. \end{aligned}$$

c) Le long du segment de droite d'extrémités $(2, 0)$ et $(2, 2)$, $x = 2$, $dx = 0$ et l'intégrale vaut

$$\int_{y=0}^2 \left\{ (2 + iy)^2 + 3(2 + iy) \right\} (0 + i dy) = \left[\frac{1}{3}(2 + iy)^3 + \frac{3}{2}(2 + iy)^2 \right]_0^2 = -14 + \frac{52}{3}i.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(2, 2)$ et $(0, 2)$, $y = 2$, $dy = 0$ et l'intégrale vaut

$$\int_{x=2}^0 \left\{ (x + 2i)^2 + 3(x + 2i) \right\} (dx + i0) = \left[\frac{1}{3}(x + 2i)^3 + \frac{3}{2}(x + 2i)^2 \right]_2^0 = -\frac{2}{3} - 20i.$$

Le résultat demandé est donc $= \left(-14 + \frac{52}{3}i\right) + \left(-\frac{2}{3} - 20i\right) = -\frac{44}{3} - \frac{8}{3}i$.

Dans tous les cas l'intégrale vaut $-\frac{44}{3} - \frac{8}{3}i$ car la fonction $f(z) = z^2 + 3z$ est holomorphe dans \mathbb{C} .

=====

Exercice 9 :

Calculer $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$ si C désigne **(a)** le cercle $|z| = 3$, **(b)** le cercle $|z| = 1$.

Solution.

a) L'application de la formule de Cauchy $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$, pour $a = 2$ et $f(z) = e^z$ donne

$$f(2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-2} dz \quad \text{ou} \quad e^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz.$$

D'où $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^2$.

b) Le point de singularité $z = 2$ est l'extérieur du cercle $|z| = 1$, donc d'après le théorème de Cauchy

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 0.$$

=====