

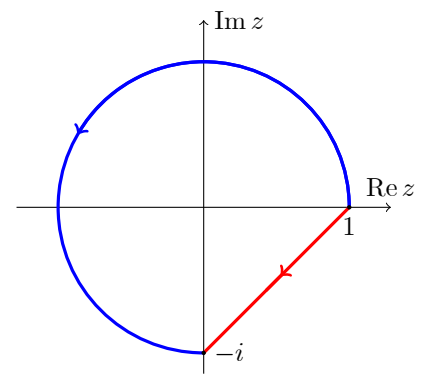
Exercice 2 (5 points) :

- a)** Montrer que la fonction $u = y + x^2 - y^2 + e^x \cos y$ est harmonique.
- b)** Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe.
- c)** Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z .

Réponse.

Exercice 3 (5 points) :

- a) Calculer $\int_C (\bar{z}^2 + 3z^2) dz$ le long
1. du cercle $|z| = 1$ de 1 à $-i$ dans le sens direct,
 2. du segment de droite joignant 1 et $-i$.
- b) Expliquer pourquoi ces deux intégrales sont différentes.



Réponse.

Exercice 4 (5 points) : On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2}$.

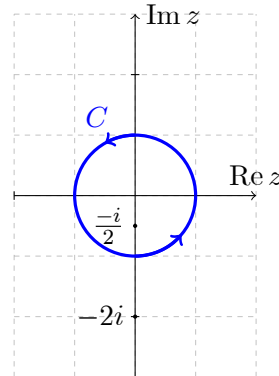
a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\int_C \frac{1}{z+2i} dz$ et $\int_C \frac{1}{z+\frac{i}{2}} dz$

où C désigne le cercle $|z| = 1$ dans le sens direct.

c) En déduire $\int_C \frac{1}{2z^2+5iz-2} dz$. **Indication.** Noter que $\frac{3i}{2z^2+5iz-2} = \frac{1}{z+\frac{i}{2}} - \frac{1}{z+2i}$.

d) En utilisant la paramétrisation $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ du cercle C , vérifier que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin t} dt = \int_C \frac{1}{2z^2+5iz-2} dz, \text{ puis en déduire } \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin t} dt.$$


Réponse.