

Épreuve de TD (interrogation) - 10 avril 2012. Durée : 45 minutes

Nom : Matricule : Forme B

Prénom : Groupe :

=====

Exercice 1 (5 points) : Calculer $\text{Log}(-1 + i)$.

Réponse.

$$\begin{aligned}\text{Log}(-1 + i) &= \ln(|-1 + i|) + i \arg(-1 + i) \\ &= \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

=====

Exercice 2 (5 points) : Séparer les parties réelle et imaginaire de la fonction $f(z) = ie^{2z}$.

Réponse.

On a

$$\begin{aligned}f(z) &= ie^{2z} = ie^{2(x+iy)} = ie^{2x}e^{2iy} \\ &= ie^{2x} \{ \cos(2y) + i \sin(2y) \} = ie^{2x} \cos(2y) - e^{2x} \sin(2y).\end{aligned}$$

$$\text{Alors } \text{Re}(f) = -e^{2x} \sin(2y) \text{ et } \text{Im}(f) = e^{2x} \cos(2y).$$

=====

Exercice 3 (5 points) : Examiner si la fonction $f(z) = 2xy - y + i(y^2 - x^2 + x)$ est holomorphe dans \mathbb{C} .

Réponse.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

On a $u = 2xy - y$ et $v = y^2 - x^2 + x$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2x + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur \mathbb{C} .

Exercice 4 (5 pts): Calculer $\oint_C (2x - iy)(dx + idy)$ le long de la parabole $x = t^2$, $y = t$ de $(0, 0)$ à $(1, 1)$.

Réponse.

Les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$ sur C correspondant à $t = 0$ et à $t = 1$.
L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^1 (2t^2 - it)(2tdt + idt) &= \int_0^1 (2t^2 - it)(2t + i) dt \\ &= \int_0^1 (4t^3 + t) dt \\ &= \left[t^4 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 5 (supplémentaire) :

À l'aide de la formule intégrale de Cauchy $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$, calculer $\oint_C \frac{z^2}{z-2} dz$ où C désigne le cercle $|z| = 3$.

Réponse.

L'application de la formule de Cauchy pour $a = 2$ et $f(z) = z^2$ donne

$$f(2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-2} dz \quad \text{ou} \quad 2^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^2}{z-2} dz.$$

$$\text{D'où} \quad \oint_C \frac{z^2}{z-2} dz = 8\pi i.$$

Nantissement : Sur mon honneur, je n'ai ni donné, ni reçu de l'aide sur ce test. Signé.....