

Examen final - 03 juin 2013. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom : Matricule :

Prénom : Groupe :

Exercice 1 (4 points) : Posons $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $w = z + z^2$.

- a) Donner une expression simple de w sous forme algébrique.
- b) Calculer $\text{Log}(z)$ et $\text{Log}(w)$ dans le cas de la détermination principale ($\arg z \in [0, 2\pi[$).
- c) En déduire $\text{Log}\left(1 - \frac{z}{w}\right)$. *Indication* : Noter que $w - z = z^2$.

Réponse.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad w = z + z^2 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} \\
 &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) + \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \cdot \text{Log}(z) = \text{Log}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = i\frac{2\pi}{3} \text{ car } \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi[.$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \text{Log}(w) &= \text{Log}(-1) = \ln|-1| + i\text{Arg}(-1) \\
 &= 0 + i\pi = i\pi.
 \end{aligned}$$

$$\text{c)} \text{ On a : } w - z = z^2.$$

Si on divise cette égalité par w on obtient $1 - \frac{z}{w} = \frac{z^2}{w}$, et donc

$$\begin{aligned}
 \text{Log}\left(1 - \frac{z}{w}\right) &= \text{Log}\frac{z^2}{w} = 2\text{Log}z - \text{Log}w \\
 &= i\frac{4\pi}{3} - i\pi \\
 &= i\frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2 (5 points) :

- a) Montrer que la fonction $u = x^2 - y^2 + e^x \cos y$ est harmonique.
b) Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe.
c) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z .

Réponse.

a) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + e^x \cos y,$
 $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 - e^x \cos y.$

On obtient alors $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + e^x \cos y - 2 - e^x \cos y = 0,$
ce qui montre que u est harmonique.

b) On utilise les équations de Cauchy-Riemann pour trouver v .

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + e^x \cos y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-2y - e^x \sin y) = 2y + e^x \sin y.$$

En intégrant la première équation par rapport à y , il vient

$$v = 2xy + e^x \sin y + C_1(x),$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution dans la 2^{ème} équation de Cauchy-Riemann on obtient

$$2y + e^x \sin y + \frac{d}{dx}C_1(x) = 2y + e^x \sin y \Rightarrow \frac{d}{dx}C_1(x) = 0$$
$$\Rightarrow C_1(x) = c,$$

où c désigne une constante réelle.

D'où $v = 2xy + e^x \sin y + c$.

c) On a

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + e^x \cos y + i(2xy + e^x \sin y + c)$$
$$= (x^2 - y^2 + i2xy) + (e^x \cos y + ie^x \sin y) + ic$$
$$= z^2 + e^z + ic.$$

=====

Exercice 3 (5,5 points) :

- a) Calculer $\oint_C (3z^2 + \bar{z}) dz$ le long
1. du cercle $|z| = 1$ de $(0, 1)$ à $(0, -1)$ dans le sens direct,
 2. du segment de droite joignant $(0, 1)$ et $(0, -1)$.
- b) Expliquer pourquoi ces deux intégrales sont différentes.

Réponse.

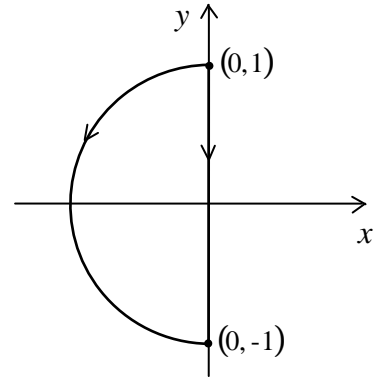
a)

1. L'arc de $(0, 1)$ à $(0, -1)$ du cercle $|z| = 1$ peut être paramétré par $z = e^{it}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ de l'arc, correspondent respectivement à $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{3\pi}{2}$.

L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\begin{aligned} \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left\{ 3(e^{it})^2 + e^{-it} \right\} d(e^{it}) &= \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \{3e^{2it} + e^{-it}\} ie^{it} dt = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3ie^{3it} + i) dt \\ &= [e^{3it} + it]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = e^{3i\frac{3\pi}{2}} + i\frac{3\pi}{2} - \left(e^{3i\frac{\pi}{2}} + i\frac{\pi}{2} \right) \\ &= i + i\frac{3\pi}{2} - \left(-i + i\frac{\pi}{2} \right) = i(2 + \pi). \end{aligned}$$



2. Sur le segment de droite joignant $(0, 1)$ et $(0, -1)$, on a $x = 0$, $dx = 0$ et y varie entre 1 et -1 .

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \oint_C (3z^2 + \bar{z}) dz &= \int_{y=1}^{-1} \left\{ 3(0 + iy)^2 + (0 - iy) \right\} (0 + idy) \\ &= \int_{y=1}^{-1} i(-3y^2 - iy) dy = \int_{y=1}^{-1} (-3iy^2 + y) dy \\ &= \left[-iy^3 + \frac{1}{2}y^2 \right]_1^{-1} = 2i \end{aligned}$$

b) La fonction à intégrer $f(z) = z^2 + \bar{z}$ n'est pas holomorphe, donc l'intégrale dépend du chemin suivi et pas seulement du point d'arrivée et du point de départ.

=====

Exercice 4 (5,5 points) : On considère la fonction $f(z) = \frac{-z}{(z-2)(z-3)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\oint_C \frac{-z}{(z-2)(z-3)} dz$ où C désigne le cercle $|z| = 4$ dans le sens direct. *Indication :* $\frac{-z}{(z-2)(z-3)} = \frac{2}{z-2} + \frac{-3}{z-3}$.

c) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = 2$.

Réponse.

a) La fonction $f(z) = \frac{-z}{(z-3)(z-2)}$ possède deux pôles simples en $z = 2$ et $z = 3$.

Le résidu en $z = 2$ est

$$\lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{-z}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-z}{z-3} = \frac{-2}{2-3} = 2.$$

Le résidu en $z = 3$ est

$$\lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{-z}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{-z}{z-2} = \frac{-3}{3-2} = -3.$$

b) De $\frac{-z}{(z-2)(z-3)} = \frac{2}{z-2} + \frac{-3}{z-3}$, on tire

$$\oint_C \frac{-z}{(z-2)(z-3)} dz = \oint_C \frac{2}{z-2} dz + \oint_C \frac{-3}{z-3} dz.$$

L'application de la formule de Cauchy pour $a = 2$ et $a = 3$ donne

$$\oint_C \frac{2}{z-2} dz = 2\pi i (2) = 4\pi i, \quad \oint_C \frac{-3}{z-3} dz = 2\pi i (-3) = -6\pi i,$$

car $z = 2$ et $z = 3$ sont à l'intérieur de C .

L'intégrale considérée vaut donc $4\pi i + (-6\pi i) = -2\pi i$.

c) Soit $z - 2 = u$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{-z}{(z-2)(z-3)} &= \frac{2}{z-2} + \frac{-3}{z-3} = \frac{2}{u} - \frac{3}{u-1} = \frac{2}{u} + \frac{3}{1-u} \\ &= \frac{2}{u} + 3(1 + u + u^2 + u^3 + \dots) \\ &= \frac{2}{u} + 3 + 3u + 3u^2 + 3u^3 + \dots \\ &= \frac{2}{z-2} + 3 + 3(z-2) + 3(z-2)^2 + 3(z-2)^3 + \dots \end{aligned}$$