

Nom : Matricule : **Forme A**

Prénom : Groupe :

Exercice 1 (4 points) : a) Calculer $i \operatorname{Log} i$. b) Résoudre l'équation $e^{-z} + 1 = 0$.

Réponse.

a) $i \operatorname{Log} i = i\{\ln |i| + i \operatorname{Arg} i\}$ (0,5 pt.)

$$= i\{\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\} = -(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}. (1 \text{ pt.})$$

b) L'équation $e^{-z} + 1 = 0$ est équivalente à $e^{-z} = -1$. (0,5 pt.)

Si $w = e^u$ on a $u = \operatorname{Log} w$. On obtient alors

$$-z = \operatorname{Log}(-1) \text{ ou } z = -\operatorname{Log}(-1), (0,5 \text{ pt.}) \text{ et donc}$$

$$z = -\{\ln |-1| + i \operatorname{Arg}(-1)\} (0,5 \text{ pt.})$$

$$= -\{\ln 1 + i(\pi + 2k\pi)\} = -i\pi(1 + 2k), k \in \mathbb{Z}. (1 \text{ pt.})$$

Autre méthode. En écrivant $e^{-z} = e^{-x-iy} = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$, on trouve le même résultat en égalant les parties réelles et imaginaires.

Exercice 2 (2,5 points) : Déterminer $u(x, y)$ et $v(x, y)$ telles que $f(z) = z^2 + i \bar{z} = u + iv$.

Réponse. On a

$$f(z) = z^2 + i \bar{z} \stackrel{(0,5 \text{ pt.})}{=} (x + iy)^2 + i(x - iy)$$

$$\stackrel{(1 \text{ pt.})}{=} x^2 - y^2 + 2ixy + ix + y \stackrel{(1 \text{ pt.})}{=} x^2 - y^2 + y + i(2xy + x).$$

$$\text{Alors } u(x, y) = x^2 - y^2 + y \text{ et } v(x, y) = 2xy + x.$$

Exercice 3 (5 pts) : Examiner si la fonction $f(z) = x + e^x \cos y + i(y + e^x \sin y)$ est holomorphe dans \mathbb{C} .

Réponse.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

On a $u = x + e^x \cos y$ et $v = y + e^x \sin y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + e^x \cos y, \text{ (1 pt.) } \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + e^x \cos y \text{ (1 pt.) } \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \text{ (1 pt.) } \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \text{ (1 pt.) } \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur \mathbb{C} . (1 pt.)

Exercice 4 (3,5 points) : Calculer $\int_C (z^3 + \bar{z}) dz$ le long du cercle $|z| = 2$ de $2i$ à -2 dans le sens direct.

Réponse.

L'arc de $2i$ à -2 du cercle $|z| = 2$ peut être paramétré par $z = 2e^{it}$, (0,5 pt.) $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. (0,5 pt.)

Les points $2i$ et -2 sur C correspondant à $\frac{\pi}{2}$ et à π . L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\begin{aligned} \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ (2e^{it})^3 + 2e^{-it} \right\} (2ie^{it} dt) &= \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2ie^{it} (8e^{3it} + 2e^{-it}) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (16ie^{4it} + 4i) dt = \left[4e^{4it} + 4it \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 4e^{4i\pi} + 4i\pi - (4e^{2i\pi} + 2i\pi) = 2i\pi. \end{aligned}$$

Exercice 5 (supplémentaire) :

À l'aide du théorème de Cauchy, calculer $\oint_C z dz$ où C désigne le cercle $|z| = 1$.

Réponse. (+0,5 pt. si l'exercice est parfaitement fait.)

Le cercle $|z| = 1$ est une courbe fermée simple et la fonction $f(z) = z$ est holomorphe dans $|z| \leq 1$, donc d'après le théorème de Cauchy $\oint_C z dz = 0$.

Nantissement : Sur mon honneur, je n'ai ni donné, ni reçu de l'aide sur ce test. Signé.....