

Série d'exercices n° 2 : Dérivation dans  $\mathbb{C}$  - Équations de Cauchy Riemann

**Exercice 1 :** À l'aide de la définition calculer la dérivée de  $f(z) = z^2 - z$ .

**Solution.** Par définition, la dérivée en  $z_0$  si elle existe est

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z - (z_0^2 - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2 - (z - z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0) - (z - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0 - 1)}{z - z_0} = 2z_0 - 1. \end{aligned}$$

La limite existe pour tout  $z_0$  dans  $\mathbb{C}$ , donc la dérivée de  $f$  est donnée par  $f'(z) = 2z - 1, z \in \mathbb{C}$ .

**Exercice 2 :** Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas dérivables aux points indiqués.

a)  $f(z) = \bar{z}$ , pour  $z \in \mathbb{C}$  b)  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ , pour  $z \in \mathbb{C}$ , c)  $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ , pour  $z \in \mathbb{C}$ .

**Solution.** Par définition, la fonction  $f$  n'est pas dérivable en  $z_0$  si la limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  n'existe pas, i.e. la limite dépend de la manière dont  $z$  tend vers  $z_0$ .

a) Si  $z = x + iy$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x - iy - (x_0 - iy_0)}{x + iy - (x_0 + iy_0)}.$

Pour  $y = y_0$  et  $x \rightarrow x_0$ , la limite cherchée est  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$

Pour  $x = x_0$  et  $y \rightarrow y_0$ , la limite cherchée est  $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1.$

La limite obtenue dépendant de la façon dont  $z \rightarrow z_0$ , la dérivée n'existe pas i.e. la fonction  $f$  n'est dérivable en aucun point.

b)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x - x_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}.$

Si  $y = y_0$  et  $x \rightarrow x_0$ , la limite est  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$

Si  $x = x_0$  et  $y \rightarrow y_0$ , la limite est  $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{0}{iy - iy_0} = 0.$

c)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{y - y_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}.$

Si  $y = y_0$  et  $x \rightarrow x_0$ , la limite est  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$

Si  $x = x_0$  et  $y \rightarrow y_0$ , la limite est  $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{iy - iy_0} = \frac{1}{i} = -i.$

**Exercice 3 :** Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué.

a)  $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin y)$ , sur  $\mathbb{C}$ , b)  $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$ , sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

c)  $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ , sur  $\mathbb{C}$ , d)  $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$ , sur  $\mathbb{C}$ .

**Solution.** Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  sont nécessaires et suffisantes pour que  $f = u + iv$  soit holomorphe.

a)  $u = e^{-y} \cos x$  et  $v = e^{-y} \sin y$ .  $\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y} \sin y + e^{-y} \cos y$ . Il est clair que  $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ , la première équation de Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite. Alors la fonction  $f$  n'est pas holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

b)  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$ .  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ . Pour la même raison que celle qui précède  $f$  n'est pas holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

c)  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ .  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$ .

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction  $f$  est donc holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

d)  $u = x^2 - y^2 - 2xy$ ,  $v = x^2 - y^2 + 2xy$ .

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2y$ .

Les équations de Cauchy-Riemann sont ainsi satisfaites et la fonction  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 4 : a)** Montrer que la fonction  $u$  définie ci-dessous est harmonique.

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Trouver une fonction  $v$  pour que la fonction  $f = u + iv$  soit holomorphe.

b) Mêmes questions pour la fonction

$$u(x, y) = y \cos y \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

**Solution. a)**  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ .  $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x + 3$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$ .

On obtient  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$ , ce qui montre que  $u$  est harmonique.

Pour trouver une fonction  $v$  pour que  $f = u + iv$  soit holomorphe, on utilise les équations de Cauchy-Riemann.

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2x - 3. \quad (2)$$

En intégrant l'équation (1) par rapport à  $y$ , il vient

$$v = 2xy - y^2 - 2y + C_1(x), \quad (3)$$

où  $C_1(x)$  est une fonction réelle de  $x$ .

Par substitution de (3) dans (2) on obtient

$$2y + \frac{d}{dx}C_1(x) = 2y + 2x - 3 \rightarrow \frac{d}{dx}C_1(x) = 2x - 3 \rightarrow C_1(x) = x^2 - 3x + c,$$

où  $c$  désigne une constante. D'où de (3)

$$v = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x + c.$$

$$\text{b) } \frac{\partial u}{\partial x} = y \cos y \operatorname{sh} x + \sin y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x = (y \cos y + \sin y) \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (y \cos y + \sin y) \operatorname{ch} x + \sin y \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x = (y \cos y + 2 \sin y) \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x. \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y \operatorname{ch} x - y \sin y \operatorname{ch} x + x \cos y \operatorname{sh} x = (\cos y - y \sin y) \operatorname{ch} x + x \cos y \operatorname{sh} x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-\sin y - \sin y - y \cos y) \operatorname{ch} x - x \sin y \operatorname{sh} x, \quad (5)$$

Par addition de (4) et (5) on obtient  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , la fonction  $u$  est donc harmonique.

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = (y \cos y + \sin y) \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = (-\cos y + y \sin y) \operatorname{ch} x - x \cos y \operatorname{sh} x. \quad (7)$$

En intégrant (par parties) l'équation (6) par rapport à  $y$ , il vient

$$v = (y \sin y + \cos y - \cos y) \operatorname{sh} x - x \cos y \operatorname{ch} x + C_1(x) = y \sin y \operatorname{sh} x - x \cos y \operatorname{ch} x + C_1(x). \quad (8)$$

Par substitution de (8) dans (7) on obtient

$$\begin{aligned} y \sin y \operatorname{ch} x - \cos y \operatorname{ch} x - x \cos y \operatorname{sh} x + \frac{d}{dx} C_1(x) &= (-\cos y + y \sin y) \operatorname{ch} x - x \cos y \operatorname{sh} x \\ \rightarrow \frac{d}{dx} C_1(x) &= 0 \quad \rightarrow C_1(x) = c, \text{ où } c \text{ désigne une constante.} \end{aligned}$$

D'où de (8) on obtient

$$v = y \sin y \operatorname{sh} x - x \cos y \operatorname{ch} x + c.$$

=====

**Exercice 5 :** Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes?

$$\text{a) } f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, \text{ b) } g(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)}.$$

**Solution.** a) Nous avons  $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1} = \frac{z+3}{(z-1)(z+1)}$ , puisque  $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+3}{(z+1)} = 2 \neq 0$ , le point  $z = 1$  est un pôle simple.

De même  $z = -1$  est aussi un pôle simple à cause de  $\lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+3}{(z-1)} = -1 \neq 0$ .

Nous pouvons déterminer  $\delta$  tel qu'il n'existe pas d'autre singularité que  $z = 1$  dans le cercle  $|z-1| = \delta$ , il suffit de choisir  $\delta = 1$ , on en déduit que  $z = 1$  est pont singulier isolé. De la même façon  $z = -1$  est aussi un point singulier isolé.

b) On obtient des singularités pour  $\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0$ , i.e.  $\frac{1}{z^2} = k\pi$  ou  $z = \pm \frac{1}{\sqrt{k\pi}}, k \in \mathbb{Z}^*$ . De plus comme  $g(z)$  n'est pas définie pour  $z = 0$ , ce point est aussi une singularité. De même, puisque  $z = 0$  est une

singularité de  $g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\sin(z^2)}$ ,  $z = \infty$  est une singularité de  $g(z)$ .

Décrivons maintenant la nature de ces singularités. En utilisant la règle de L'Hôpital

$$\lim_{z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \left( z - \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \right) g(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{z - \frac{1}{\sqrt{k\pi}}}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{1}{\frac{-2}{z^3} \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{-1}{2k\pi\sqrt{k\pi} \cos(k\pi)} \neq 0$$

et

$$\lim_{z \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \left( z + \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \right) g(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{z + \frac{1}{\sqrt{k\pi}}}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{1}{\frac{-2}{z^3} \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{-1}{2k\pi\sqrt{k\pi} \cos(k\pi)} \neq 0.$$

Les singularités  $z = \pm \frac{1}{\sqrt{k\pi}}, k \in \mathbb{Z}^*$  sont donc des pôles simples. Comme nous pouvons entourer chacune de ces singularités par un cercle de rayon  $\delta_k$  n'en contenant pas d'autre, on en déduit qu'elles sont isolées.

Etant donné que l'on ne peut pas trouver d'entier  $n$  tel que  $\lim_{z \rightarrow 0} (z - 0)^n g(z) = A \neq 0$ , on en déduit que  $z = 0$  est une singularité essentielle. De plus comme tout cercle de rayon  $\delta$  centré en  $z = 0$  contient d'autres singularités que  $z = 0$ , on en déduit que  $z = 0$  est une singularité non isolée.