

Série d'exercices n° 5 : Théorème des résidus

Exercice 1 :

Trouver les résidus de (a) $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ et (b) $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ en tous les pôles à distance finie.

Exercice 2 :

Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)} dz$ le long du cercle C d'équation (a) $|z| = 3$ et (b) $|z| = 1$.

Exercice 3 :

Evaluer (a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$ et (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx$.

Exercice 4 :

Evaluer (a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta} d\theta$ et (b) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta} d\theta$.

Exercice 5 :

Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$, $m > 0$.

Exercice 6 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$, $0 < p < 1$.

Exercice 8 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Ch}(ax)}{\text{Ch } x} dx = \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$, où $|a| < 1$.

Exercice 9 :

Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \text{Log } 2$.