

Nom : Matricule :

Prénom : Groupe :

Exercice 1 (7 pts.) : Soit C le cercle unité $|z| = 1$.a) En utilisant le théorème de Cauchy, évaluer $\int_C \frac{1}{2} z dz$. (Justifier votre réponse).b) En utilisant la formule intégrale de Cauchy, évaluer $\int_C \frac{4}{z} dz$ et $\int_C \frac{1}{2z^3} dz$.c) En déduire $\int_0^{2\pi} (3 + 2 \cos^2 \theta) d\theta$.*Indication* : Poser $z = e^{i\theta}$, d'où $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

Réponse.

=====

Exercice 2 (8 pts.) : On considère la fonction $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)} dz$ où C désigne le cercle $|z| = \frac{3}{2}$ dans le sens direct. *Indication :* $\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z-2} + \frac{-1}{z-1}$.

c) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = 1$.

=====

Réponse.