

Nom : Matricule : Forme A

Prénom : Groupe :

Nantisement : Sur mon honneur, je ne vais pas, ni donner, ni demander de l' aide sur ce test. Signé.....

=====

Exercice 1 (4 points) :a) Calculer $\text{Log}(i)$ et $\text{Log}(2i)$.b) Résoudre l'équation $e^{2z} - 3ie^z - 2 = 0$.

Réponse.

=====

Exercice 2 (5 points) :

- a) Examiner si la fonction $f(z) = 2x(1 + y) + i(2y - x^2 + y^2) + \sin z$ est holomorphe dans \mathbb{C} .
- b) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z . **Indication.** Noter que $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ et
- $$x^2 - y^2 = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2}.$$

Réponse.

=====

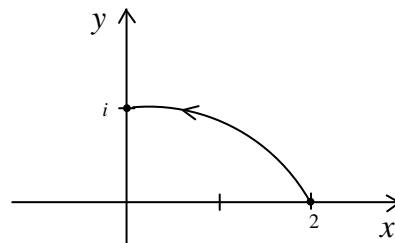
Exercice 3 (5 points) :

Calculer $\int_C (2z - \bar{z}) dz$ le long de la courbe $z(t) = 2 \cos t + i \sin t$ de 2 à i dans le sens direct.

Pendant les calculs, vous aurez peut-être besoin des intégrales suivantes :

$$\int \sin t \cos t dt = -\frac{1}{2} \cos^2 t + c \text{ et } \int (\cos^2 t - 3 \sin^2 t) dt = \sin(2t) - t + c.$$

Réponse.



=====

Exercice 4 (6 points) : On considère la fonction $f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en **tous les pôles**.

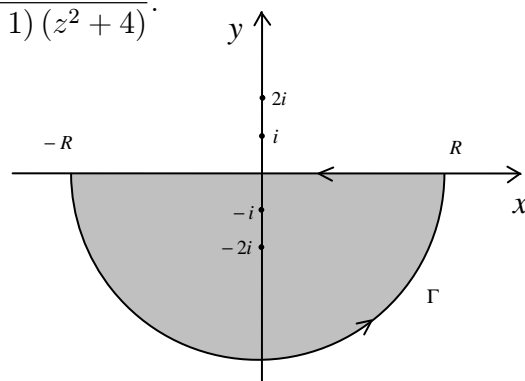
b) Par application du théorème des résidus calculer

$$\oint_C \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz \text{ où } C \text{ désigne le contour fermé de}$$

la figure ci-contre formé du demi cercle Γ et du segment

$[R, -R]$, décrit dans le sens direct.

c) En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.



Réponse.