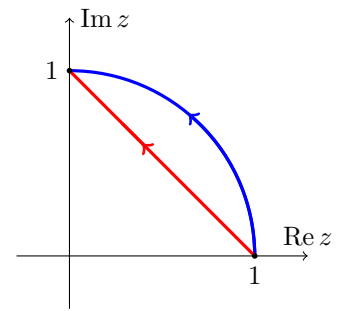




**Exercice 2 (5 points) :**

- a) Calculer  $\int_C (\bar{z}^2 + 3z^2) dz$  le long
1. du cercle  $|z| = 1$  de  $(1, 0)$  à  $(0, 1)$  dans le sens direct,
  2. du segment de droite joignant  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ .
- b) Expliquer pourquoi ces deux intégrales sont différentes.



**Réponse.**

**Exercice 3 (5 points) :**

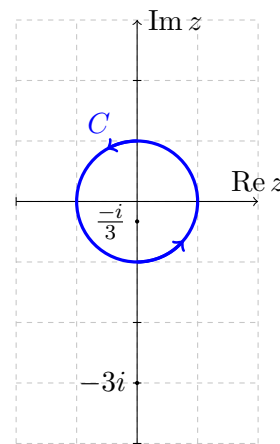
a) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer  $\int_C \frac{1}{z+3i} dz$  et

$\int_C \frac{1}{z+\frac{i}{3}} dz$  où  $C$  désigne le cercle  $|z|=1$  dans le sens direct.

b) En déduire  $\int_C \frac{2}{3z^2+10iz-3} dz$ . **Indication.** Noter que  $\frac{8i}{3z^2+10iz-3} = \frac{1}{z+\frac{i}{3}} - \frac{1}{z+3i}$ .

c) En utilisant la paramétrisation  $z = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  du cercle  $C$ , vérifier que

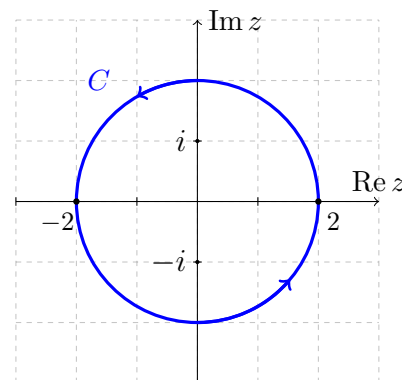
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt = \int_C \frac{2}{3z^2+10iz-3} dz, \text{ puis en déduire } \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt.$$



**Réponse.**

**Exercice 4 (5 points)** : On considère la fonction  $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 1}$ .

Soit  $C$  le cercle  $|z| = 2$  orienté dans le sens direct.



a) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer

$$\int_C \frac{2z}{z^2 + 1} dz. \text{ Indication : } \frac{2z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z - i} + \frac{1}{z + i}.$$

b) En utilisant la paramétrisation  $z = 2e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  du cercle  $C$ ,

$$\text{recalculer } \int_C \frac{2z}{z^2 + 1} dz.$$

c) Trouver les résidus de  $f(z)$  en **tous les pôles**.

d) Comparer le résultat obtenu en (a) et (b) avec la somme des résidus de la question (c).

**Réponse.**