

Examen final - 03 juin 2013. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom : ..... Matricule : .....

Prénom : ..... Groupe : .....

Exercice 1 (4 points) : Posons  $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $w = z + z^2$ .

- a) Donner une expression simple de  $w$  sous forme algébrique.
- b) Calculer  $\text{Log}(z)$  et  $\text{Log}(w)$  dans le cas de la détermination principale ( $\arg z \in [0, 2\pi[$ ).
- c) En déduire  $\text{Log}\left(1 - \frac{z}{w}\right)$ . *Indication* : Noter que  $w - z = z^2$ .

Réponse.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } w = z + z^2 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} \\
 &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) + \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) \text{ (0,5 pt.)} \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ (0,5 pt.)} \\
 &= -1. \text{ (0,5 pt.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \cdot \text{Log}(z) &= \text{Log}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = i\frac{2\pi}{3} \text{ car } \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi[. \text{ (0,5 pt.)} \\
 \cdot \text{Log}(w) &= \text{Log}(-1) = \ln|-1| + i\text{Arg}(-1) \text{ (0,5 pt.)} \\
 &= 0 + i\pi = i\pi. \text{ (0,5 pt.)}
 \end{aligned}$$

$$\text{c) On a : } w - z = z^2.$$

Si on divise cette égalité par  $w$  on obtient  $1 - \frac{z}{w} = \frac{z^2}{w}$ , et donc

$$\begin{aligned}
 \text{Log}\left(1 - \frac{z}{w}\right) &= \text{Log}\frac{z^2}{w} = 2\text{Log}z - \text{Log}w \text{ (0,5 pt.)} \\
 &= i\frac{4\pi}{3} - i\pi \text{ (0,25 pt.)} \\
 &= i\frac{\pi}{3}. \text{ (0,25 pt.)}
 \end{aligned}$$

---

---

**Exercice 2 (5 points) :**

- a) Montrer que la fonction  $u = x^2 - y^2 + e^x \cos y$  est harmonique.  
b) Trouver une fonction  $v$  telle que  $f(z) = u + iv$  soit holomorphe.  
c) Exprimer  $f(z)$  à l'aide de la variable  $z$ .

**Réponse.**

a) On a  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + e^x \cos y, \quad (0,5 \text{ pt.})$   
 $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 - e^x \cos y. \quad (0,5 \text{ pt.})$

On obtient alors  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + e^x \cos y - 2 - e^x \cos y = 0, \quad (0,5 \text{ pt.})$   
ce qui montre que  $u$  est harmonique.  $(0,5 \text{ pt.})$

b) On utilise les équations de Cauchy-Riemann pour trouver  $v$ .

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + e^x \cos y, \quad (0,5 \text{ pt.})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-2y - e^x \sin y) = 2y + e^x \sin y. \quad (0,5 \text{ pt.})$$

En intégrant la première équation par rapport à  $y$ , il vient

$$v = 2xy + e^x \sin y + C_1(x), \quad (0,5 \text{ pt.})$$

où  $C_1(x)$  est une fonction réelle de  $x$ .

Par substitution dans la 2<sup>ème</sup> équation de Cauchy-Riemann on obtient

$$\left. \begin{aligned} 2y + e^x \sin y + \frac{d}{dx}C_1(x) &= 2y + e^x \sin y \Rightarrow \frac{d}{dx}C_1(x) = 0 \\ &\Rightarrow C_1(x) = c, \end{aligned} \right\} (0,25 \text{ pt.})$$

où  $c$  désigne une constante réelle.

D'où  $v = 2xy + e^x \sin y + c. \quad (0,25 \text{ pt.})$

c) On a

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = x^2 - y^2 + e^x \cos y + i(2xy + e^x \sin y + c) \quad (0,25 \text{ pt.}) \\ &= (x^2 - y^2 + i2xy) + (e^x \cos y + ie^x \sin y) + ic \quad (0,25 \text{ pt.}) \\ &= z^2 + e^z + ic. \quad (0,5 \text{ pt.}) \end{aligned}$$

=====

**Exercice 3 (5,5 points) :**

- a) Calculer  $\oint_C (3z^2 + \bar{z}) dz$  le long
1. du cercle  $|z| = 1$  de  $(0, 1)$  à  $(0, -1)$  dans le sens direct,
  2. du segment de droite joignant  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ .
- b) Expliquer pourquoi ces deux intégrales sont différentes.

**Réponse.**

a)

1. L'arc de  $(0, 1)$  à  $(0, -1)$  du cercle  $|z| = 1$  peut être paramétré par  $z = e^{it}$ ,  $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ . (0,5 pt.)

Les points  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$  de l'arc, correspondent respectivement à  $t = \frac{\pi}{2}$  et  $t = \frac{3\pi}{2}$ . (0,5 pt.)

L'intégrale donnée a alors pour valeur

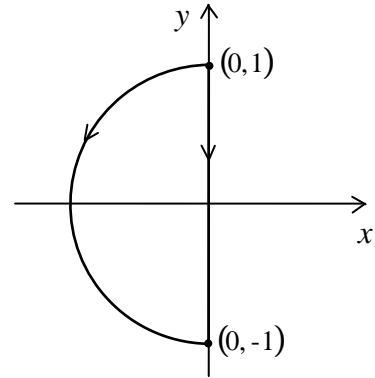
$$\begin{aligned} \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left\{ 3(e^{it})^2 + e^{-it} \right\} d(e^{it}) &= \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \{3e^{2it} + e^{-it}\} ie^{it} dt = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3ie^{3it} + i) dt \quad (0,5 \text{ pt.}) \\ &= [e^{3it} + it]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = e^{3i\frac{3\pi}{2}} + i\frac{3\pi}{2} - \left( e^{3i\frac{\pi}{2}} + i\frac{\pi}{2} \right) \quad (0,5 \text{ pt.}) \\ &= i + i\frac{3\pi}{2} - \left( -i + i\frac{\pi}{2} \right) = i(2 + \pi). \quad (0,5 \text{ pt.}) \end{aligned}$$

2. Sur le segment de droite joignant  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ , on a  $x = 0$ ,  $dx = 0$  et  $y$  varie entre 1 et  $-1$ . (0,5 pt.)

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \oint_C (3z^2 + \bar{z}) dz &= \int_{y=1}^{-1} \left\{ 3(0 + iy)^2 + (0 - iy) \right\} (0 + i dy) \quad (0,5 \text{ pt.}) \\ &= \int_{y=1}^{-1} i(-3y^2 - iy) dy = \int_{y=1}^{-1} (-3iy^2 + y) dy \quad (0,5 \text{ pt.}) \\ &= \left[ -iy^3 + \frac{1}{2}y^2 \right]_1^{-1} = 2i \quad (0,5 \text{ pt.}) \end{aligned}$$

b) La fonction à intégrer  $f(z) = z^2 + \bar{z}$  n'est pas holomorphe, donc l'intégrale dépend du chemin suivi et pas seulement du point d'arrivée et du point de départ. (1 pt.)



=====

**Exercice 4 (5,5 points) :** On considère la fonction  $f(z) = \frac{-z}{(z-2)(z-3)}$ .

a) Trouver les résidus de  $f(z)$  en tous les pôles.

b) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer  $\oint_C \frac{-z}{(z-2)(z-3)} dz$  où  $C$  désigne le cercle  $|z| = 4$  dans le sens direct. *Indication :*  $\frac{-z}{(z-2)(z-3)} = \frac{2}{z-2} + \frac{-3}{z-3}$ .

c) Déterminer le développement en série de Laurent de  $f(z)$  au voisinage de  $z = 2$ .

**Réponse.**

a) La fonction  $f(z) = \frac{-z}{(z-3)(z-2)}$  possède deux pôles simples en  $z = 2$  et  $z = 3$ . (0,5 pt.)

Le résidu en  $z = 2$  est

$$\lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{-z}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-z}{z-3} = \frac{-2}{2-3} = 2. \text{ (0,5 pt.)}$$

Le résidu en  $z = 3$  est

$$\lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{-z}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{-z}{z-2} = \frac{-3}{3-2} = -3. \text{ (0,5 pt.)}$$

b) De  $\frac{-z}{(z-2)(z-3)} = \frac{2}{z-2} + \frac{-3}{z-3}$ , on tire

$$\oint_C \frac{-z}{(z-2)(z-3)} dz = \oint_C \frac{2}{z-2} dz + \oint_C \frac{-3}{z-3} dz. \text{ (0,5 pt.)}$$

L'application de la formule de Cauchy pour  $a = 2$  et  $a = 3$  donne

$$\oint_C \frac{2}{z-2} dz = 2\pi i (2) = 4\pi i, \text{ (0,5 pt.)} \quad \oint_C \frac{-3}{z-3} dz = 2\pi i (-3) = -6\pi i, \text{ (0,5 pt.)}$$

car  $z = 2$  et  $z = 3$  sont à l'intérieur de  $C$ .

L'intégrale considérée vaut donc  $4\pi i + (-6\pi i) = -2\pi i$ . (0,5 pt.)

c) Soit  $z - 2 = u$ . D'où

$$\begin{aligned} \frac{-z}{(z-2)(z-3)} &= \frac{2}{z-2} + \frac{-3}{z-3} = \frac{2}{u} - \frac{3}{u-1} = \frac{2}{u} + \frac{3}{1-u} \text{ (0,5 pt.)} \\ &= \frac{2}{u} + 3(1 + u + u^2 + u^3 + \dots) \text{ (0,5 pt.)} \\ &= \frac{2}{u} + 3 + 3u + 3u^2 + 3u^3 + \dots \text{ (0,5 pt.)} \\ &= \frac{2}{z-2} + 3 + 3(z-2) + 3(z-2)^2 + 3(z-2)^3 + \dots \text{ (0,5 pt.)} \end{aligned}$$