

Nom : ..... Matricule : ..... **Forme A**

Prénom : ..... Groupe : .....

Exercice 1 (4 points) : a) Calculer  $i \operatorname{Log} i$ . b) Résoudre l'équation  $e^{-z} + 1 = 0$ .

Réponse.

a)  $i \operatorname{Log} i = i\{\ln |i| + i \operatorname{Arg} i\}$  (0,5 pt.)

$$= i\{\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\} = -(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}. (1 \text{ pt.})$$

b) L'équation  $e^{-z} + 1 = 0$  est équivalente à  $e^{-z} = -1$ . (0,5 pt.)

Si  $w = e^u$  on a  $u = \operatorname{Log} w$ . On obtient alors

$$-z = \operatorname{Log}(-1) \text{ ou } z = -\operatorname{Log}(-1), (0,5 \text{ pt.}) \text{ et donc}$$

$$z = -\{\ln |-1| + i \operatorname{Arg}(-1)\} (0,5 \text{ pt.})$$

$$= -\{\ln 1 + i(\pi + 2k\pi)\} = -i\pi(1 + 2k), k \in \mathbb{Z}. (1 \text{ pt.})$$

**Autre méthode.** En écrivant  $e^{-z} = e^{-x-iy} = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$ , on trouve le même résultat en égalant les parties réelles et imaginaires.

Exercice 2 (2,5 points) : Déterminer  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  telles que  $f(z) = z^2 + i \bar{z} = u + iv$ .

Réponse. On a

$$f(z) = z^2 + i \bar{z} \stackrel{(0,5 \text{ pt.})}{=} (x + iy)^2 + i(x - iy)$$

$$\stackrel{(1 \text{ pt.})}{=} x^2 - y^2 + 2ixy + ix + y \stackrel{(1 \text{ pt.})}{=} x^2 - y^2 + y + i(2xy + x).$$

$$\text{Alors } u(x, y) = x^2 - y^2 + y \text{ et } v(x, y) = 2xy + x.$$

Exercice 3 (5 pts) : Examiner si la fonction  $f(z) = x + e^x \cos y + i(y + e^x \sin y)$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

Réponse.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  sont nécessaires et suffisantes pour que  $f = u + iv$  soit holomorphe.

On a  $u = x + e^x \cos y$  et  $v = y + e^x \sin y$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + e^x \cos y, \text{ (1 pt.) } \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + e^x \cos y \text{ (1 pt.) } \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

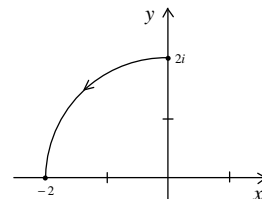
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \text{ (1 pt.) } \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \text{ (1 pt.) } \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction  $f$  est donc holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . (1 pt.)

**Exercice 4 (3,5 points) :** Calculer  $\int_C (z^3 + \bar{z}) dz$  le long du cercle  $|z| = 2$  de  $2i$  à  $-2$  dans le sens direct.

**Réponse.**

L'arc de  $2i$  à  $-2$  du cercle  $|z| = 2$  peut être paramétré par  $z = 2e^{it}$ , (0,5 pt.)  $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ . (0,5 pt.)



Les points  $2i$  et  $-2$  sur  $C$  correspondant à  $\frac{\pi}{2}$  et à  $\pi$ .

L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\begin{aligned} \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ (2e^{it})^3 + 2e^{-it} \right\} (2ie^{it} dt) &= \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2ie^{it} (8e^{3it} + 2e^{-it}) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (16ie^{4it} + 4i) dt = \left[ 4e^{4it} + 4it \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \end{aligned}$$

$$(0,5 \text{ pt.}) = 4e^{4i\pi} + 4i\pi - (4e^{2i\pi} + 2i\pi) = 2i\pi.$$

**Exercice 5 (supplémentaire) :**

À l'aide du théorème de Cauchy, calculer  $\oint_C z dz$  où  $C$  désigne le cercle  $|z| = 1$ .

**Réponse.** (+0,5 pt. si l'exercice est parfaitement fait.)

Le cercle  $|z| = 1$  est une courbe fermée simple et la fonction  $f(z) = z$  est holomorphe dans  $|z| \leq 1$ , donc d'après le théorème de Cauchy  $\oint_C z dz = 0$ .

**Nantissement :** Sur mon honneur, je n'ai ni donné, ni reçu de l'aide sur ce test. Signé.....