

Nom : ..... Matricule : ..... Forme A

Prénom : ..... Groupe : .....

**Exercice 1 (8 points) :** a) Développer en série de Laurent autour de son point singulier  $f(z) = \frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}$ .

b) Préciser la nature de son point singulier.

c) En déduire le résidu de  $f(z)$  en ce point singulier.**Réponse.**a) Soit  $\frac{1}{z} = u$ , alors  $z = \frac{1}{u}$  et

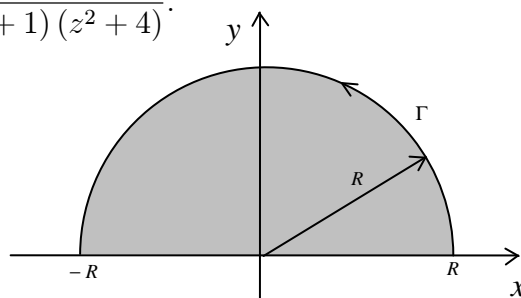
$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}} &= u^2 e^u = u^2 \left( 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \right) \\
&= u^2 + u^3 + \frac{u^4}{2!} + \frac{u^5}{3!} + \dots \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^5} + \dots
\end{aligned}$$

b) La partie principale de la série de Laurent possède une infinité de termes, donc le point  $z = 0$  est une **singularité essentielle**.c) Le résidu de  $f(z)$  en  $z = 0$  est le coefficient de  $\frac{1}{z}$  dans la série de Laurent. Alors  $\text{Res}(f, 0) = 0$  puisque la série de Laurent de  $f(z)$  n'a pas le terme  $\frac{1}{z}$ .**Exercice 2 (12 points) :** On considère la fonction  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$ .a) Trouver les résidus de  $f(z)$  en tous les pôles.

b) Par application du théorème des résidus calculer

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz$$

où  $C$  désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment,  $[-R, +R]$  et du demi

cercle  $\Gamma$  décrit dans le sens direct.

c) En déduire  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ .

Réponse.

a) La fonction  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$  possède quatre pôles simples en  $z = i, -i, 2i$  et  $-2i$  [ racines de  $(z^2+1)(z^2+4)$  ].

Le résidu en  $z = i$  est

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)(z^2+4)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{(2i)(3)} = \frac{-i}{6}.$$

Le résidu en  $z = -i$  est

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{1}{(z-i)(z+i)(z^2+4)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{(z-i)(z^2+4)} = \frac{1}{(-2i)(3)} = \frac{i}{6}.$$

Le résidu en  $z = 2i$  est

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i) \frac{1}{(z^2+1)(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{1}{(-3)(4i)} = \frac{i}{12}.$$

Le résidu en  $z = -2i$  est

$$\lim_{z \rightarrow -2i} (z+2i) \frac{1}{(z^2+1)(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{1}{(z^2+1)(z-2i)} = \frac{1}{(-3)(-4i)} = \frac{-i}{12}.$$

b) Les pôles intérieurs à  $C$  sont  $z = i$  et  $z = 2i$ . Par application du théorème des résidus

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 2\pi i \{ \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i) \} = 2\pi i \left( \frac{-i}{6} + \frac{i}{12} \right) = \frac{\pi}{6}. \quad (1)$$

c) L'intégrale (1) peut être partagée et s'écrit sous forme

$$\int_{-R}^R \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + \int_{\Gamma} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = \frac{\pi}{6}. \quad (2)$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (2) quand  $R \rightarrow \infty$  et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 4)} R i e^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient 
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}.$$

=====  
Nantissement : Sur mon honneur, je n' ai ni donné, ni reçu de l' aide sur ce test. Signé.....