

Nom : Matricule : Forme B

Prénom : Groupe :

Exercice 1 (4 points) : a) Calculer $\text{Log}(1+i)$. b) Résoudre l'équation $e^z + 2 = 0$.

Réponse.

$$\text{a) } \text{Log}(1+i) = \ln(|1+i|) + i\text{Arg}(1+i) \text{ (0,5 pt.)}$$

$$= \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}. \text{ (1 pt.)}$$

$$\text{b) } \text{L'équation } e^z + 2 = 0 \text{ est équivalente à } e^z = -2. \text{ (0,5 pt.)}$$

Si $w = e^z$ on a $z = \text{Log } w$. On obtient alors $z = \text{Log}(-2)$, (0,5 pt.) et donc

$$z \stackrel{(0,5 \text{ pt.})}{=} \ln|-2| + i\text{Arg}(-2) \stackrel{(1 \text{ pt.})}{=} \ln 2 + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Autre méthode. En écrivant $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, on trouve le même résultat en égalant les parties réelles et imaginaires.

Exercice 2 (2,5 points) : Déterminer $u(x, y)$ et $v(x, y)$ telles que $f(z) = \bar{z}^2 + iz = u + iv$.

Réponse. On a

$$f(z) = \bar{z}^2 + iz \stackrel{(0,5 \text{ pt.})}{=} (x - iy)^2 + i(x + iy)$$

$$\stackrel{(1 \text{ pt.})}{=} x^2 - y^2 - 2ixy + ix - y \stackrel{(1 \text{ pt.})}{=} x^2 - y^2 - y + i(x - 2xy).$$

$$\text{Alors } u(x, y) = x^2 - y^2 - y \text{ et } v(x, y) = x - 2xy.$$

Exercice 3 (5 pts): Examiner si la fonction $f(z) = -y + e^x \cos y + i(x + e^x \sin y)$ est holomorphe dans \mathbb{C} .

Réponse.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

On a $u = -y + e^x \cos y$ et $v = x + e^x \sin y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \text{ (1 pt.) } \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \text{ (1 pt.) } \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

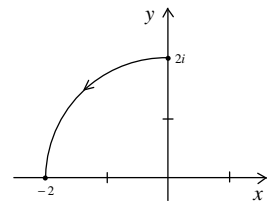
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1 - e^x \sin y, \text{ (1 pt.) } \frac{\partial v}{\partial x} = 1 + e^x \sin y \text{ (1 pt.) } \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur \mathbb{C} . (1 pt.)

Exercice 4 (3,5 points) : Calculer $\int_C (z^3 + 2\bar{z}) dz$ le long du cercle $|z| = 2$ de $2i$ à -2 dans le sens direct.

Réponse.

L'arc de $2i$ à -2 du cercle $|z| = 2$ peut être paramétré par $z = 2e^{it}$, (0,5 pt.) $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. (0,5 pt.)



Les points $2i$ et -2 sur C correspondant à $\frac{\pi}{2}$ et à π .

L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\begin{aligned} \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ \underbrace{(2e^{it})^3}_{(0,5 \text{ pt.})} + \underbrace{4e^{-it}}_{(0,5 \text{ pt.})} \right\} (2ie^{it} dt) &= \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2ie^{it} (8e^{3it} + 4e^{-it}) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \underbrace{(16ie^{4it} + 8i)}_{(0,5 \text{ pt.})} dt = \underbrace{[4e^{4it} + 8it]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}}_{(0,5 \text{ pt.})} \end{aligned}$$

$$(0,5 \text{ pt.}) = 4e^{4i\pi} + 8i\pi - (4e^{2i\pi} + 4i\pi) = 4i\pi.$$

Exercice 5 (supplémentaire) :

À l'aide du théorème de Cauchy, calculer $\oint_C z^2 dz$ où C désigne le cercle $|z| = 1$.

Réponse. (+0,5 pt. si l'exercice est parfaitement fait.)

Le cercle $|z| = 1$ est une courbe fermée simple et la fonction $f(z) = z^2$ est holomorphe dans $|z| \leq 1$, donc d'après le théorème de Cauchy $\oint_C z^2 dz = 0$.

Nantisement : Sur mon honneur, je n'ai ni donné, ni reçu de l'aide sur ce test. Signé.....