

Nom : Matricule : **Forme A**

Prénom : Groupe :

Nantisement : Sur mon honneur, je ne vais pas, ni donner, ni demander de l' aide sur ce test. Signé.....

=====

Exercice 1 (4 points) :a) Calculer $\text{Log}(i)$ et $\text{Log}(2i)$.b) Résoudre l'équation $e^{2z} - 3ie^z - 2 = 0$.

Réponse.

$$\text{a) } \cdot \text{Log}(i) = \ln|i| + i\text{Arg}i \text{ (0,5 pt.)}$$

$$= \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \text{ (0,5 pt.)}$$

$$\cdot \text{Log}(2i) = \ln|2i| + i\text{Arg}2i \text{ (0,5 pt.)}$$

$$= \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \text{ (0,5 pt.)}$$

b) Si on pose $w = e^z$, l'équation à résoudre devienne $w^2 - 3iw - 2 = 0$ et donc

$$w = \frac{3i \pm \sqrt{(-3i)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{3i \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{3i \pm i}{2} = i \text{ ou } 2i. \text{ (1 pt.)}$$

On obtient alors $z = \text{Log}(w) = \text{Log}(i)$ ou $z = \text{Log}(2i)$, et donc

$$z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \text{ (0,5 pt.)}$$

ou

$$z = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \text{ (0,5 pt.)}$$

Autre méthode. En séparant les parties réelles et imaginaires et en résolvant le système obtenu, on trouve le même résultat.

=====

Exercice 2 (5 points) :

- a) Examiner si la fonction $f(z) = 2x(1+y) + i(2y - x^2 + y^2) + \sin z$ est holomorphe dans \mathbb{C} .
- b) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z . **Indication.** Noter que $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ et $x^2 - y^2 = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2}$.

Réponse.

a) Puisque $\sin z$ est une fonction holomorphe dans \mathbb{C} (0,5 pt.), donc il suffit d'examiner que si la fonction $g(z) = 2x(1+y) + i(2y - x^2 + y^2) = u + iv$ est holomorphe dans \mathbb{C} .

Les dérivées partielles de $u = 2x(1+y)$ et $v = 2y - x^2 + y^2$ sont continues dans \mathbb{C} , donc les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $g = u + iv$ soit holomorphe.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(1+y), \text{ (0,5 pt.) } \frac{\partial v}{\partial y} = 2 + 2y \text{ (0,5 pt.) } \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x, \text{ (0,5 pt.) } \frac{\partial v}{\partial x} = -2x \text{ (0,5 pt.) } \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites (0,5 pt.), la fonction g est donc holomorphe sur \mathbb{C} . D'où $f(z)$ est holomorphe dans \mathbb{C} . (0,5 pt.)

b) En remplaçant x par $\frac{z+\bar{z}}{2}$, y par $\frac{z-\bar{z}}{2i}$ et $x^2 - y^2$ par $\frac{z^2 + \bar{z}^2}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} f(z) &= 2\frac{z+\bar{z}}{2} \left(1 + \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i \left(2\frac{z-\bar{z}}{2i} - \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2}\right) + \sin z \text{ (0,5 pt.)} \\ &= z + \bar{z} + (z + \bar{z}) \frac{z - \bar{z}}{2i} + z - \bar{z} - i \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2} + \sin z \\ &= z + \bar{z} - i \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2} + z - \bar{z} - i \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2} + \sin z \\ &= 2z - iz^2 + \sin z \text{ (1 pt.)} \end{aligned}$$

=====

Exercice 3 (5 points) :

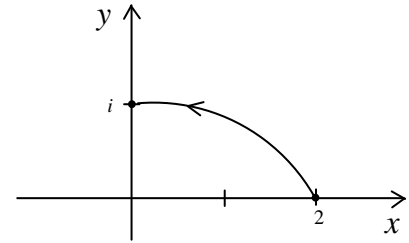
Calculer $\int_C (2z - \bar{z}) dz$ le long de la courbe $z(t) = 2 \cos t + i \sin t$ de 2 à i dans le sens direct.

Pendant les calculs, vous aurez peut-être besoin des intégrales suivantes :

$$\int \sin t \cos t dt = -\frac{1}{2} \cos^2 t + c \text{ et } \int (\cos^2 t - 3 \sin^2 t) dt = \sin(2t) - t + c.$$

Réponse.

Les points 2 et i sur C correspondant à $t = 0$ (0,5 pt.) et à $t = \frac{\pi}{2}$ (0,5 pt.).
L'intégrale curviligne considérée vaut donc



$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \{2(2 \cos t + i \sin t) - (2 \cos t - i \sin t)\}(-2 \sin t + i \cos t) dt \\ & \quad \quad \quad (0,5 \text{ pt.}) \quad \quad \quad (1 \text{ pt.}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{4 \cos t + 2i \sin t - 2 \cos t + i \sin t\}(-2 \sin t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t + 3i \sin t)(-2 \sin t + i \cos t) dt (0,5 \text{ pt.}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-7 \sin t \cos t + i(2 \cos^2 t - 6 \sin^2 t)\} dt (0,5 \text{ pt.}) \\ &= -7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt + 2i \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 3 \sin^2 t) dt (0,5 \text{ pt.}) \\ &= \left[\frac{7}{2} \cos^2 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2i [\sin(2t) - t]_0^{\frac{\pi}{2}} (0,5 \text{ pt.}) \\ &= -\frac{7}{2} - i\pi. (0,5 \text{ pt.}) \end{aligned}$$

=====

Exercice 4 (6 points) : On considère la fonction $f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en **tous les pôles**.

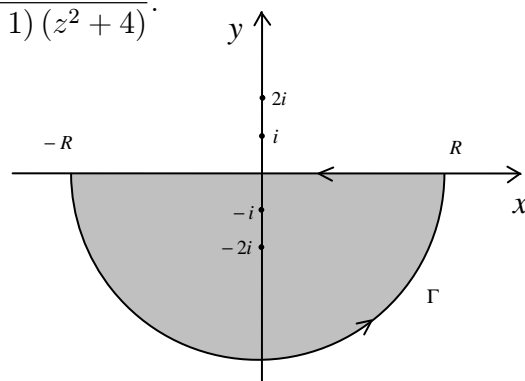
b) Par application du théorème des résidus calculer

$$\oint_C \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz \text{ où } C \text{ désigne le contour fermé de}$$

la figure ci-contre formé du demi cercle Γ et du segment

$[R, -R]$, décrit dans le sens direct.

c) En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.



Réponse.

a) La fonction $f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$ possède quatre pôles simples en $z = i, -i, 2i$ et $-2i$ (1 pt.) [racines de $(z^2 + 1)(z^2 + 4)$].

Le résidu en $z = i$ est

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z^2 + 3}{(z - i)(z + i)(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 3}{(z + i)(z^2 + 4)} = \frac{2}{(2i)(3)} = \frac{1}{3i} = \frac{-i}{3}. (0,5 \text{ pt.})$$

Le résidu en $z = -i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{z^2 + 3}{(z - i)(z + i)(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3}{(z - i)(z^2 + 4)} = \frac{2}{(-2i)(3)} = \frac{1}{-3i} = \frac{i}{3}. (0,5 \text{ pt.})$$

Le résidu en $z = 2i$ est

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z + 2i)} = \frac{-1}{(-3)(4i)} = \frac{-1}{-12i} = \frac{-i}{12}. (0,5 \text{ pt.})$$

Le résidu en $z = -2i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -2i} (z + 2i) \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z - 2i)} = \frac{-1}{(-3)(-4i)} = \frac{-1}{12i} = \frac{i}{12}. (0,5 \text{ pt.})$$

b) Les pôles intérieurs à C sont $z = -i$ et $z = -2i$ (0,5 pt.). Par application du théorème des résidus

$$\oint_C \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = 2\pi i \{ \text{Res}(f, -i) + \text{Res}(f, -2i) \} = 2\pi i \left(\frac{i}{3} + \frac{i}{12} \right) = -\frac{5}{6}\pi. (1 \text{ pt.}) \quad (1)$$

c) L'intégrale (1) peut-être partagée et s'écrit sous forme

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz + \int_R^{-R} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = -\frac{5}{6}\pi. \text{(0,5 pt.)} \quad (2)$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (2) quand $R \rightarrow \infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{(R^2 e^{2i\theta} + 3)}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 4)} R i e^{i\theta} d\theta = 0, \text{(0,5 pt.)}$$

on obtient

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{-R} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = -\frac{5}{6}\pi.$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{5}{6}\pi. \text{(0,5 pt.)}$$