

Épreuve de TD - 8 may 2013. Durée : 25 minutes

Nom : Matricule :

Prénom : Groupe :

Exercice 1 (5 points) : Déterminer toutes les valeurs de z telles que $e^{iz} = \sqrt{3} + i$.

Réponse.

Si $w = e^u$ on a $u = \log w$. On obtient alors

$$iz = \log(\sqrt{3} + i) \text{ ou } z = \frac{1}{i} \log(\sqrt{3} + i) = -i \log(\sqrt{3} + i),$$

et donc

$$\begin{aligned} z &= -i \left\{ \ln |\sqrt{3} + i| + i \arg(\sqrt{3} + i) \right\} \\ &= -i \left\{ \ln \sqrt{4} + i \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \right\} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi - i \ln 2, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Autre méthode. En écrivant $e^{iz} = e^{(ix-y)} = e^{-y} (\cos x + i \sin x)$, on trouve le même résultat en égalant les parties réelles et imaginaires.

Exercice 2 (5 points) : Déterminer $u(x, y)$ et $v(x, y)$ telles que $ze^{3z} = u + iv$.

Réponse. On a

$$\begin{aligned} ze^{3z} &= (x + iy) e^{3x+3iy} = (x + iy) e^{3x} (\cos(3y) + i \sin(3y)) \\ &= e^{3x} (x \cos(3y) - y \sin(3y)) + ie^{3x} (x \sin(3y) + y \cos(3y)). \end{aligned}$$

Alors

$$u(x, y) = e^{3x} (x \cos(3y) - y \sin(3y))$$

et

$$v(x, y) = e^{3x} (x \sin(3y) + y \cos(3y)).$$

=====

Exercice 3 (5 points) :

Examiner si la fonction $f(z) = x^3 - y^2 + x + i(3x^2y + y - x)$ est holomorphe dans \mathbb{C} .

Réponse.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

On a $u = x^3 - y^2 + x$ et $v = 3x^2y + y - x$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy - 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites, la fonction f est donc n'est pas holomorphe sur \mathbb{C} .