

Examen final - 01 juin 2014. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom et Prénom :

Matricule : Groupe :

Exercice 1 (4 points) :

- a) Montrer que la fonction $u = x^2 - y^2 + x$ est harmonique.
- b) Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe dans \mathbb{C} .
- c) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z .

Réponse.

a) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$.

On obtient alors $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.

b) On utilise les équations de Cauchy-Riemann pour trouver v .

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-2y) = 2y.$$

En intégrant la première équation par rapport à y , il vient

$$v = 2xy + y + C_1(x), \text{ où } C_1(x) \text{ est une fonction réelle de } x.$$

Par substitution dans la deuxième équation de Cauchy-Riemann on obtient

$$2y + \frac{d}{dx} C_1(x) = 2y \Rightarrow \frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \Rightarrow C_1(x) = c, \text{ où } c \text{ désigne une constante réelle.}$$

D'où $v = 2xy + y + c$.

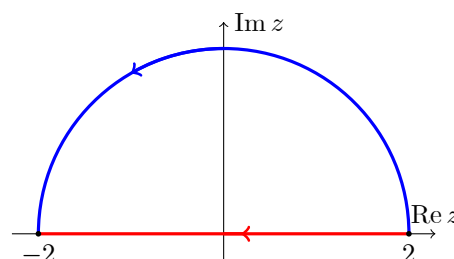
c) On a

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + c) \\ &= (x^2 - y^2 + i2xy) + (x + iy) + ic \\ &= z^2 + z + ic. \end{aligned}$$

Exercice 2 (5 points) :

a) Calculer $\int_C (2\bar{z} + 3|z|^2) dz$ le long

1. du cercle $|z| = 2$ de $(2, 0)$ à $(-2, 0)$ dans le sens direct,
2. du segment de droite joignant $(2, 0)$ et $(-2, 0)$.



b) Expliquer pourquoi ces deux intégrales sont différentes.

=====

Réponse.

a)

1. Le demi cercle de $(2, 0)$ à $(-2, 0)$ du cercle $|z| = 2$ peut être paramétré par $z = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

Les points $(2, 0)$ et $(-2, 0)$ du demi cercle, correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = \pi$.

On a $dz = d(2e^{it}) = 2ie^{it}dt$, $\bar{z} = 2e^{-it}$ et $|z|^2 = (2|e^{it}|)^2 = 4$. L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\int_{t=0}^{\pi} (4e^{-it} + 12) 2ie^{it} dt = \int_0^{\pi} (8i + 24ie^{it}) dt = [8it + 24e^{it}]_0^{\pi}$$
$$= 8i\pi + 24e^{i\pi} - (0 + 24) = 8i\pi - 24 - 24 = 8i\pi - 48.$$

2. Sur le segment de droite joignant $(2, 0)$ et $(-2, 0)$, on a $y = 0$, $dy = 0$ et x varie entre 2 et -2 .

L'intégrale donnée vaut

$$\int_C (2\bar{z} + 3|z|^2) dz = \int_{x=2}^{-2} (2x + 3x^2) (dx + i0)$$
$$= \int_2^{-2} (2x + 3x^2) dx = [x^2 + x^3]_2^{-2} = 4 - 8 - (4 + 8) = -16.$$

b) La fonction à intégrer $f(z) = 2\bar{z} + 3|z|^2$ n'est pas holomorphe, donc l'intégrale dépend du chemin suivi et pas seulement du point d'arrivée et du point de départ.

=====

Exercice 3 (5,5 points) : On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application du théorème des résidus, calculer $\int_C \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2} dz$,

où C désigne le cercle $|z| = 1$ dans le sens direct.

c) En déduire $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \sin \theta} d\theta$. *Indication :* Poser $z = e^{i\theta}$, d'où $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$.

=====

Réponse.

a) La fonction $f(z) = \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2}$ possède deux pôles simples en $z_1 = -2i$ et $z_2 = -\frac{1}{2}i$ qui sont des racines de $2z^2 + 5iz - 2 = 0$.

Le résidu en $z_1 = -2i$ est

$$\text{Res}(f, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} (z - (-2i)) \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2}.$$

En utilisant la règle de L'Hospital

$$\operatorname{Res}(f, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{1}{4z + 5i} = \frac{1}{-3i} = \frac{i}{3}.$$

De même le résidu en $z_2 = -\frac{1}{2}i$ est

$$\operatorname{Res}(f, -\frac{1}{2}i) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}i} (z - (-\frac{1}{2}i)) \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}i} \frac{1}{4z + 5i} = \frac{1}{3i} = \frac{-i}{3}.$$

b) Seul $z_2 = -\frac{1}{2}i$ est à l'intérieur de C , alors par application du théorème des résidus

$$\int_C \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -\frac{1}{2}i) = 2\pi i \frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{3}.$$

c) On pose $z = e^{i\theta}$. D'où $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ et donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \sin \theta} d\theta = \int_C \frac{1}{5 + 4 \frac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2} dz,$$

où C est le cercle unité centré à l'origine. Alors d'après la question b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \sin \theta} d\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 4 (5,5 points) : On considère la fonction $f(z) = \frac{3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en **tous les pôles**.

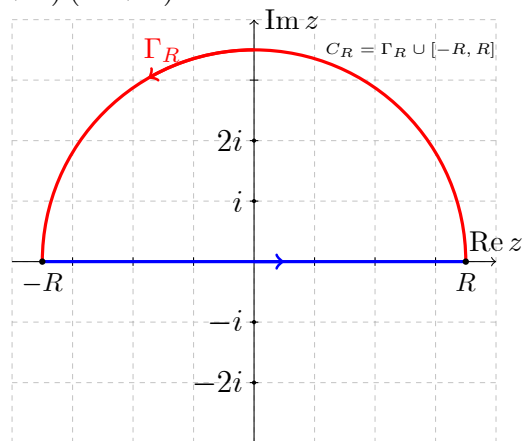
b) Par application du théorème des résidus calculer

$$\int_{C_R} \frac{3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz, \text{ où } C_R \text{ désigne le contour fermé de}$$

la figure ci-contre formé du demi cercle Γ_R et du segment

$[-R, R]$, décrit dans le sens direct.

c) En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.



Réponse.

a) La fonction $f(z) = \frac{3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$ possède quatre pôles simples en $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 2i$ et $z_4 = -2i$ qui sont des racines de $(z^2 + 1)(z^2 + 4) = 0$.

Le résidu en $z_1 = i$ est

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{3}{(z - i)(z + i)(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{3}{(z + i)(z^2 + 4)} = \frac{3}{(2i)(3)} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}.$$

Le résidu en $z_2 = -i$ est

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{3}{(z - i)(z + i)(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{3}{(z - i)(z^2 + 4)} = \frac{3}{(-2i)(3)} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}.$$

Le résidu en $z_3 = 2i$ est

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{3}{(z^2 + 1)(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{3}{(z^2 + 1)(z + 2i)} = \frac{3}{(-3)(4i)} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}.$$

Le résidu en $z_4 = -2i$ est

$$\text{Res}(f, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} (z + 2i) \frac{3}{(z^2 + 1)(z - 2i)(z + 2i)} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{3}{(z^2 + 1)(z - 2i)} = \frac{3}{(-3)(-4i)} = \frac{-i}{4}.$$

b) Les pôles intérieurs à C sont $z_1 = i$ et $z_3 = 2i$. Par application du théorème des résidus

$$\int_C \frac{3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = 2\pi i \{ \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i) \} = 2\pi i \left(\frac{-i}{2} + \frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

c) L'intégrale (1) peut-être partagée et s'écrit sous forme

$$\int_{\Gamma_R} \frac{3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz + \int_{-R}^R \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Sil'on prend la limite des deux membres de (2) quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{3}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 4)} R i e^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{2}.$$