

Nom : ..... Matricule : .....

Prénom : ..... Groupe : .....

Exercice 1 (7 pts.) : Soit  $C$  le cercle unité  $|z| = 1$ .a) En utilisant le théorème de Cauchy, évaluer  $\int_C z dz$ . (Justifier votre réponse).b) En utilisant la formule intégrale de Cauchy, évaluer  $\int_C \frac{2}{z} dz$  et  $\int_C \frac{1}{z^3} dz$ .c) En déduire  $\int_0^{2\pi} (1 + 4 \cos^2 \theta) d\theta$ .*Indication* : Poser  $z = e^{i\theta}$ , d'où  $d\theta = \frac{dz}{iz}$  et  $\cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .**Réponse.**a) La fonction  $f(z) = z$  est holomorphe dans la courbe fermée simple  $C$ , donc d'après le théorème de Cauchy  $\int_C z dz = 0$ .b) Pour  $f(z) = 1$  et  $z_0 = 0$ , la formule intégrale de Cauchy s'écrit  $\int_C \frac{1}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0)$ .Si  $n = 0$ , et  $n = 2$ , on obtient

$$\int_C \frac{2}{z} dz = 2 \int_C \frac{1}{z} dz = 4\pi i, \quad \int_C \frac{1}{z^3} dz = 0.$$

c) On pose  $z = e^{i\theta}$ . D'où  $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$  ou  $d\theta = \frac{dz}{iz}$  et  $\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .On a donc, si  $C$  désigne le cercle unité  $|z| = 1$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (1 + 4 \cos^2 \theta) d\theta &= \int_C \left( 1 + \frac{4}{4} \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 \right) \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{z} \left( 1 + \left( z^2 + 2z \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) \right) dz \\ &= \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{z} \left( 1 + z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} \right) dz = \frac{1}{i} \int_C \left( \frac{3}{z} + z + \frac{1}{z^3} \right) dz \\ &= \frac{1}{i} \int_C \frac{3}{z} dz + \frac{1}{i} \int_C z dz + \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{z^3} dz = \frac{1}{i} 6\pi i = 6\pi. \end{aligned}$$

Exercice 2 (8 pts.) : On considère la fonction  $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}$ .

a) Trouver les résidus de  $f(z)$  en tous les pôles.

b) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer  $\int_C \frac{z}{(z-2)(z-3)} dz$  où  $C$  désigne le cercle  $|z| = \frac{5}{2}$  dans le sens direct. Indication :  $\frac{z}{(z-2)(z-3)} = \frac{3}{z-3} + \frac{-2}{z-2}$ .

c) Déterminer le développement en série de Laurent de  $f(z)$  au voisinage de  $z = 2$ .

=====

**Réponse.**

a) La fonction  $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}$  possède deux pôles simples en  $z_1 = 2$  et  $z_2 = 3$ .

Le résidu en  $z_1 = 2$  est

$$\text{Res}(f, 2) = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{z}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z}{z-3} = \frac{2}{2-3} = -2.$$

Le résidu en  $z_2 = 3$  est

$$\text{Res}(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{z}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z}{z-2} = \frac{3}{3-2} = 3.$$

b) De  $\frac{z}{(z-2)(z-3)} = \frac{3}{z-3} + \frac{-2}{z-2}$ , on tire

$$\int_C \frac{z}{(z-2)(z-3)} dz = \int_C \frac{3}{z-3} dz + \int_C \frac{-2}{z-2} dz.$$

L'application de la formule de Cauchy pour  $z_1 = 2$  et  $z_2 = 3$  donne

$$\int_C \frac{3}{z-3} dz = 0, \quad \int_C \frac{-2}{z-2} dz = 2\pi i (-2) = -4\pi i,$$

car  $z_1 = 2$  est à l'intérieur de  $C$ , mais  $z_2 = 3$  est à l'extérieur de  $C$ .

L'intégrale considérée vaut donc  $0 + (-4\pi i) = -4\pi i$ .

c) Soit  $z - 2 = u$ . D'où

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-2)(z-3)} &= \frac{3}{z-3} + \frac{-2}{z-2} = \frac{3}{u-1} - \frac{2}{u} = -\frac{2}{u} - \frac{3}{1-u} \\ &= -\frac{2}{u} - 3(1+u+u^2+u^3+\dots) \\ &= -\frac{2}{u} - 3 - 3u - 3u^2 - 3u^3 - \dots \\ &= -\frac{2}{z-2} - 3 - 3(z-2) - 3(z-2)^2 - 3(z-2)^3 - \dots \end{aligned}$$