Série d'exercices n° 3 : Intégration dans $\mathbb{C}$

==

Exercice 1 :

Calculer $\displaystyle\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)\,dx + (3x - y)\,dy$ le long de

a) la parabole $x = 2t$, $y = t^2 + 3$,

b) la ligne brisée formée par les segments de droite $(0,3)$ à $(2,3)$ et $(2,3)$ à $(2,4)$,

c) le segment de droite d'extrémités $(0,3)$ et $(2,4)$.

Solution. **a)** Les points $(0,3)$ et $(2,4)$ de la parabole correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = 1$. L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\int_{t=0}^{1} \left\{2\left(t^2+3\right)+(2t)^2\right\}2dt + \left\{3\,(2t)-\left(t^2+3\right)\right\}2tdt = \int_0^1 \left(24t^2+12-2t^3-6t\right)dt = \frac{33}{2}.$$

b) Le long du segment de droite d'extrémités $(0,3)$ et $(2,3)$, $y = 3$, $dy = 0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_{x=0}^{2} \left(6+x^2\right)dx + (3x-3)\,0 = \int_0^2 \left(6+x^2\right)dx = \frac{44}{3}.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(2,3)$ et $(2,4)$, $x = 2$, $dx = 0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_{y=3}^{4} (2y+4)\,0 + (6-y)\,dy = \int_3^4 (6-y)\,dy = \frac{5}{2}.$$

Le résultat demandé est donc $= \dfrac{44}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{103}{6}$.

c) Une équation de la droite joignant $(0,3)$ à $(2,4)$ est $2y - x = 6$. On en tire $x = 2y - 6$. D'où la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{y=3}^{4} \left\{2y+(2y-6)^2\right\}2dy + \left\{3\,(2y-6)-y\right\}dy = \int_3^4 \left(8y^2-39y+54\right)dy = \frac{97}{6}$$

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant $y = \dfrac{1}{2}(x+6)$.

==

Exercice 2 :

Évaluer $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$ de $z = 0$ à $z = 4 + 2i$ le long de la courbe C dans les cas suivants.

a) la courbe C définie par $z = t^2 + it$,

b) la courbe C formée des segments joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4 + 2i$.

Solution. a) Les points $z = 0$ et $z = 4 + 2i$ sur C correspondant à $t = 0$ et à $t = 2$. L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\int_{t=0}^{2} \overline{(t^2 + it)} d\left(t^2 + it\right) = \int_0^2 \left(t^2 - it\right)(2t + i)\, dt = \int_0^2 \left(2t^3 - it^2 + t\right) dt = 10 - \frac{8}{3}i.$$

Autre méthode. L'intégrale donnée s'écrit

$$\int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i \int_C xdy - ydx$$

Les équations paramétriques de C sont $x = t^2$, $y = t$ de $t = 0$ à $t = 2$; l'intégrale curviligne a donc pour valeur

$$\int_{t=0}^{2} \left(t^2\right)(2tdt) + (t)(dt) + i \int_{t=0}^{2} \left(t^2\right)(dt) - (t)(2tdt) = \int_0^2 \left(2t^3 + t\right) dt + i \int_0^2 \left(-t^2\right) dt = 10 - \frac{8}{3}i.$$

b) L'intégrale donnée vaut

$$\int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i \int_C xdy - ydx$$

La droite qui joint 0 à $2i$ joint les points $(0, 0)$ et $(0, 2)$, on a donc sur cette droite $x = 0$, $dx = 0$ et la valeur de l'intégrale est

$$\int_{y=0}^{2} (0)(0) + ydy + i \int_{y=0}^{2} (0)(dy) - y(0) = \int_{y=0}^{2} ydy = 2.$$

Sur le segment de droite $2i$, $4 + 2i$ on a $y = 2$, $dy = 0$, d'où

$$\int_{x=0}^{4} xdx + (2)(0) + i \int_{x=0}^{4} (x)(0) - 2dx = \int_0^4 xdx + i \int_0^4 (-2)\, dx = 8 - 8i.$$

Et le résultat demandé est $= 2 + (8 - 8i) = 10 - 8i$.

==

Exercice 3 :

Évaluer les intégrales $\oint_C dz$, $\oint_C zdz$ et $\oint_C z - idz$,
où C est une courbe fermée simple.

Solution. Ce sont des conséquences du théorème de Cauchy car les fonctions 1, z et $z - i$ sont holomorphes dans C et ont des dérivées continues.

Ces résultats peuvent aussi être établis directement à partir de la définition de l'intégrale.

==

==

Exercice 4 :

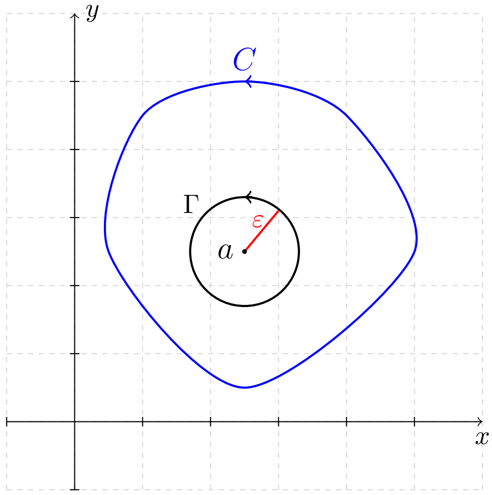
Évaluer $\oint_C \frac{1}{z-a} dz$ où C désigne une courbe fermée et $z = a$ est

a) à l'extérieur de C, **b)** à l'intérieur de C.

Solution. **a)** Si a est à l'extérieur de C, alors $f(z) = \frac{1}{z-a}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C. Alors d'après le théorème de Cauchy $\oint\limits_C \frac{1}{z-a} dz = 0$.

b)

Supposons a intérieur à C et soit Γ un cercle de rayon ε, centré en $z = a$, tel que Γ soit à l'intérieur de C [ceci peut être réalisé car $z = a$ est un point intérieur].



D'après une conséquence du théorème de Cauchy

$$\oint\limits_C \frac{1}{z-a} dz = \oint\limits_\Gamma \frac{1}{z-a} dz. \tag{1}$$

D'autre part sur Γ, $|z-a| = \varepsilon$ ou $z - a = \varepsilon e^{i\theta}$, i.e. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. D'où tenant compte de $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$, le deuxième membre de (1) devient

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i,$$

qui est le résultat cherché.

==

Exercice 5 :

Soit C le cercle $|z| = 3$. Évaluer

$$\textbf{a)} \oint\limits_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz, \quad \textbf{b)} \oint\limits_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz, \quad \textbf{c)} \oint\limits_C \frac{e^z}{(z+1)(z-4)} dz.$$

Solution. **a)** De $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$, on tire

$$\oint\limits_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = \oint\limits_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz - \oint\limits_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz$$

L'application de la formule de Cauchy pour $a = 2$ et $a = 1$ donne

$$\oint\limits_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz = 2\pi i \left\{\sin\left(\pi 2^2\right) + \cos\left(\pi 2^2\right)\right\} = 2\pi i,$$

$$\oint\limits_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz = 2\pi i \left\{\sin\left(\pi 1^2\right) + \cos\left(\pi 1^2\right)\right\} = -2\pi i,$$

car $z=1$ et $z=2$ sont à l'intérieur de C et $\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)$ est holomorphe dans C. L'intégrale considérée vaut donc $2\pi i-(-2\pi i)=4\pi i$.

b) Soit $f(z)=e^{2z}$ et $a=-1$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz. \tag{2}$$

Si $n=3$, alors $f'''(z)=8e^{2z}$ et $f'''(-1)=8e^{-2}$. Dans ces conditions la formule (2) devient

$$8e^{-2}=\frac{3!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^{2z}}{(z-a)^4}dz,$$

d'où l'on tire la valeur de l'intégrale considérée $\frac{8}{3}\pi i e^{-2}$.

c) Les singularités de $z\to\frac{e^z}{(z+1)(z-4)}$ sont $z_1=-1$ et $z_2=4$. Seul $z_1=-1$ est à l'intérieur de C. Alors la fonction $f(z)=\frac{e^z}{z-4}$ est holomorphe dans C et donc par l'application de la formule intégrale de Cauchy on aura

$$\oint\limits_C \frac{e^z}{(z+1)(z-4)}dz=\oint\limits_C \frac{f(z)}{z+1}dz=2\pi i\, f(-1)=-\frac{2}{5}\pi i e^{-1}.$$

==

Exercice 6 :

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, montrer que

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\pi.$$

Indication : Poser $z=e^{i\theta}$, C le cercle unité $|z|=1$, d'où $d\theta=\frac{dz}{iz}$ et $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Solution. On pose $z=e^{i\theta}$. D'où $dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$ ou $d\theta=\frac{dz}{iz}$ et $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

On a donc, si C désigne le cercle unité $|z|=1$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta &= \oint\limits_C\left\{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}^4\frac{dz}{iz}=\frac{1}{2^4 i}\oint\limits_C\frac{1}{z}\left(z^4+4z^3\frac{1}{z}+6z^2\frac{1}{z^2}+4z\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}\right)dz\\
&=\frac{1}{16i}\oint\limits_C\frac{1}{z}\left(z^4+4z^2+6+\frac{4}{z^2}+\frac{1}{z^4}\right)dz=\frac{1}{16i}\oint\limits_C\left(z^3+4z+\frac{6}{z}+\frac{4}{z^3}+\frac{1}{z^5}\right)dz\\
&=\frac{1}{16i}\oint\limits_C\left(z^3+4z\right)dz+\frac{3}{8i}\oint\limits_C\frac{1}{z}dz+\frac{1}{4i}\oint\limits_C\frac{1}{z^3}dz+\frac{1}{16i}\oint\limits_C\frac{1}{z^5}dz.\end{aligned}$$

La fonction z^3+4z est holomorphe dans C, donc d'après le théorème de Cauchy $\oint\limits_C(z^3+4z)\,dz=0$.

Pour $f(z)=1$ et $a=0$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit $f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{1}{z^{n+1}}dz$.

Si $n = 0,\ 2,\ 4$, on obtient

$$\oint\limits_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i, \quad \oint\limits_C \frac{1}{z^3} dz = 0, \quad \oint\limits_C \frac{1}{z^5} dz = 0.$$

D'où $\int\limits_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{8i}\,(2\pi i) = \frac{3}{4}\pi.$

===