

Série d'exercices n° 5 : Théorème des résidus

**Exercice 1 :**

Trouver les résidus de (a)  $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$  et (b)  $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$  en tous les pôles à distance finie.

**Exercice 2 :**

Calculer  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)} dz$  le long du cercle  $C$  d'équation (a)  $|z| = 3$  et (b)  $|z| = 1$ .

**Exercice 3 :**

Evaluer (a)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$  et (b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx$ .

**Exercice 4 :**

Evaluer (a)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta} d\theta$  et (b)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta} d\theta$ .

**Exercice 5 :**

Montrer que  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$ ,  $m > 0$ .

**Exercice 6 :**

Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 7 :**

Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$ ,  $0 < p < 1$ .

**Exercice 8 :**

Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Ch}(ax)}{\text{Ch } x} dx = \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$ , où  $|a| < 1$ .

**Exercice 9 :**

Démontrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \text{Log } 2$ .