

Série d'exercices n° 5 : Théorème des résidus

Exercice 1 :

Trouver les résidus de **(a)** $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z^2 + 4)}$ et **(b)** $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ en tous les pôles à distance finie.

Solution.

(a) $f(z)$ possède un pôle double en $z = -1$ et des pôles simples en $z = \pm 2i$.

Le résidu en $z = -1$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z + 1)^2 \cdot \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z^2 + 4)} \right\} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z^2 + 4)(2z - 2) - (z^2 - 2z)(2z)}{(z^2 + 4)^2} = -\frac{14}{25}.$$

Le résidu en $z = 2i$ est

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \left\{ (z - 2i) \cdot \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z + 2i)(z - 2i)} \right\} = \frac{-4 - 4i}{(2i + 1)^2(4i)} = \frac{7 + i}{25}.$$

Le résidu en $z = -2i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -2i} \left\{ (z + 2i) \cdot \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z + 2i)(z - 2i)} \right\} = \frac{-4 + 4i}{(-2i + 1)^2(-4i)} = \frac{7 - i}{25}.$$

(b) $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ possède des pôles doubles en $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ i.e. $z = m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

Méthode 1.

Le résidu en $z = m\pi$ est

$$\lim_{z \rightarrow m\pi} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z - m\pi)^2 \frac{e^z}{\sin^2 z} \right\} = \lim_{z \rightarrow m\pi} \frac{e^z [(z - m\pi)^2 \sin z + 2(z - m\pi) \sin z - 2(z - m\pi)^2 \cos z]}{\sin^3 z}$$

En posant $z - m\pi = u$ ou $z = u + m\pi$, cette limite peut être écrite sous la forme

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{u+m\pi} [u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u]}{\sin^3 u} = e^{m\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u}{\sin^3 u} = e^{m\pi}.$$

Méthode 2. (à l'aide des séries de Laurent)

Cette méthode consiste à développer $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = m\pi$ et à chercher le coefficient de $\frac{1}{z - m\pi}$ qui est le résidu demandé. On pose pour

simplifier les calculs, $z = u + m\pi$. On doit alors développer la fonction en série de Laurent dans le voisinage de $u = 0$; la fonction considérée prend alors la forme $\frac{e^{m\pi u}}{\sin^2(m\pi + u)} = e^{m\pi} \frac{e^u}{\sin^2 u}$.

À l'aide des développements de Maclaurin de e^u et $\sin u$ on trouve par division

$$\begin{aligned} e^{m\pi} \frac{e^u}{\sin^2 u} &= e^{m\pi} \frac{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots}{\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots\right)^2} = e^{m\pi} \frac{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots}{u^2 \left(1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \dots\right)^2} \\ &= e^{m\pi} \frac{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots}{u^2 \left(1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2u^4}{45} - \dots\right)} = e^{m\pi} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{5}{6} + \frac{u}{3} + \dots \right), \end{aligned}$$

le résidu en $z = m\pi$ est donc $e^{m\pi}$.

Exercice 2 :

Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$ le long du cercle C d'équation **(a)** $|z| = 3$ et **(b)** $|z| = 1$.

Solution.

(a) La fonction à intégrer $\frac{e^z}{z^2(z^2 + 2z + 2)}$ possède un pôle double $z = 0$ et deux pôles simples en $z = -1 \pm i$ [racines de $z^2 + 2z + 2$]. Tous ces pôles sont intérieurs à $C : |z| = 3$.

Le résidu en $z = 0$ est

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ z^2 \frac{e^z}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^2 + 2z + 2) e^z - e^z (2z + 2)}{(z^2 + 2z + 2)^2} = 0.$$

Le résidu en $z = -1 + i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1+i} \left\{ (z - (-1 + i)) \frac{e^z}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \right\} = \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{e^z}{z^2} \lim_{z \rightarrow -1+i} \left\{ \frac{z - (-1 + i)}{(z^2 + 2z + 2)} \right\} = \frac{e^{-1+i}}{(-1 + i)^2} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{e^{-1+i}}{4}.$$

Le résidu en $z = -1 - i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1-i} \left\{ (z - (-1 - i)) \frac{e^z}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \right\} = \lim_{z \rightarrow -1-i} \frac{e^z}{z^2} \lim_{z \rightarrow -1-i} \left\{ \frac{z - (-1 - i)}{(z^2 + 2z + 2)} \right\} = \frac{e^{-1-i}}{(-1 - i)^2} \cdot \frac{1}{-2i} = \frac{e^{-1-i}}{4}.$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz &= \text{somme des résidus intérieur à } |z| = 3. \\ &= 0 + \frac{e^{-1+i}}{4} + \frac{e^{-1-i}}{4} = \frac{e^{-1}}{2} \cos(1). \end{aligned}$$

(b) Le seul pôle intérieur à $|z| = 1$ est $z = 0$. Puisque le résidu en $z = 0$ est 0, on a donc

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz = 0.$$

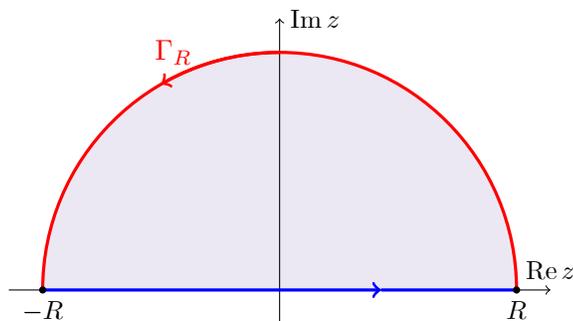
Exercice 3 :

Evaluer (a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx$ et (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx$.

Solution.

(a)

On considère $\int_C \frac{1}{z^6 + 1} dz$, où C désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.



Puisque $z^6 + 1 = 0$ pour $z = e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}, e^{\frac{7\pi i}{6}}, e^{\frac{9\pi i}{6}}, e^{\frac{11\pi i}{6}}$, ces valeurs de z sont les pôles simples de $\frac{1}{z^6 + 1}$.

Seuls les pôles $e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}$ et $e^{\frac{5\pi i}{6}}$ sont à l'intérieur de C , d'où en utilisant la règle de L'Hôpital :

$$\begin{aligned} \text{Résidu en } e^{\frac{\pi i}{6}} &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{6}}} \left\{ \left(z - e^{\frac{\pi i}{6}} \right) \frac{1}{z^6 + 1} \right\} = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi i}{6}}, \\ \text{Résidu en } e^{\frac{3\pi i}{6}} &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{3\pi i}{6}}} \left\{ \left(z - e^{\frac{3\pi i}{6}} \right) \frac{1}{z^6 + 1} \right\} = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{3\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi i}{2}}, \\ \text{Résidu en } e^{\frac{5\pi i}{6}} &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{5\pi i}{6}}} \left\{ \left(z - e^{\frac{5\pi i}{6}} \right) \frac{1}{z^6 + 1} \right\} = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{5\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-\frac{25\pi i}{2}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_C \frac{1}{z^6 + 1} dz = 2\pi i \left\{ \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi i}{6}} + \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi i}{2}} + \frac{1}{6} e^{-\frac{25\pi i}{2}} \right\} = \frac{2\pi}{3},$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{1}{x^6 + 1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6 + 1} dz = \frac{2\pi}{3}. \tag{1}$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (1) quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{1}{(R e^{i\theta})^6 + 1} R i e^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{x^6 + 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx = \frac{2\pi}{3}$.

Noter que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{3}$.

(b) Les pôles de $\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)}$ situés à l'intérieur du contour C de la figure de (a) sont $z = i$ d'ordre 2 et $z = -1 + i$ d'ordre 1.

Le résidu en $z = i$ est

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left\{ (z - i)^2 \frac{z^2}{(z - i)^2 (z + i)^2 (z^2 + 2z + 2)} \right\} = \frac{-12 + 9i}{100}.$$

Le résidu en $z = -1 + i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1+i} \left\{ (z - (-1 + i)) \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z - (-1 + i)) (z - (-1 - i))} \right\} = \frac{3 - 4i}{25}.$$

D'où

$$\oint_C \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)} dz = 2\pi i \left\{ \frac{-12 + 9i}{100} + \frac{3 - 4i}{25} \right\} = \frac{7\pi}{50}$$

ou

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)} dz = \frac{7\pi}{50}.$$

En prenant la limite de ces expressions quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(R e^{i\theta})^2}{\left((R e^{i\theta})^2 + 1 \right)^2 \left((R e^{i\theta})^2 + 2R e^{i\theta} + 2 \right)} R i e^{i\theta} d\theta = 0,$$

nous obtenons le résultat demandé. i.e.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx = \frac{7\pi}{50}.$$

Exercice 4 :

Evaluer (a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} d\theta$ et (b) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \theta} d\theta$.

Solution.

(a) Soit $z = e^{i\theta}$. D'où $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $dz = iz d\theta$ et

alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} d\theta = \oint_C \frac{1}{3 - 2 \frac{z+z^{-1}}{2} + \frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{2}{(1 - 2i) z^2 + 6iz - 1 - 2i} dz,$$

où C est le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

Les pôles de $\frac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$ sont les pôles simples

$$z = \frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 - 4(1-2i)(-1-2i)}}{2(1-2i)} = \frac{-6i \pm 4i}{2(1-2i)} = 2 - i \text{ ou } \frac{2-i}{5}.$$

Seul $\frac{2-i}{5}$ est à l'intérieur de C .

Le résidu en $\frac{2-i}{5}$ est

$$\lim_{z \rightarrow \frac{2-i}{5}} \left\{ \left(z - \frac{2-i}{5} \right) \frac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \right\} = \lim_{z \rightarrow \frac{2-i}{5}} \frac{2}{2(1-2i)z + 6i} = \frac{1}{2i}$$

d'après la règle de L'Hôpital.

D'où $\oint_C \frac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} dz = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$, qui est la valeur demandée.

(b) On pose $z = e^{i\theta}$. D'où $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{i\theta} dz = iz d\theta$ et donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \theta} d\theta = \oint_C \frac{1}{2 + \frac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz,$$

où C est le cercle unité centré à l'origine.

Les pôles de $\frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$ sont obtenus en résolvant $z^2 + 4iz - 1 = 0$ et sont donnés par

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - (-1)(1)}}{1} = -2i \pm \sqrt{-3} = (-2 \pm \sqrt{3})i.$$

Seul $(-2 + \sqrt{3})i$ est à l'intérieur de C , car

$$\left| (-2 + \sqrt{3})i \right| = 2 - \sqrt{3} < 1 \text{ et } \left| (-2 - \sqrt{3})i \right| = 2 + \sqrt{3} > 1.$$

Le résidu en $(-2 + \sqrt{3})i$ est

$$\lim_{z \rightarrow (-2 + \sqrt{3})i} \left\{ \left(z - (-2 + \sqrt{3})i \right) \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} \right\} = \lim_{z \rightarrow (-2 + \sqrt{3})i} \frac{2}{2z + 4i} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

d'après la règle de L'Hôpital.

D'où $\oint_C \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, qui est la valeur demandée.

Exercice 5 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$, $m > 0$.

Solution.

On considère $\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz$ où C est le contour de la figure de l'exercice 3. La fonction à intégrer possède des pôles simples $z = \pm i$, mais seul $z = i$ est intérieur à C .

Le résidu en $z = i$ est

$$\lim_{z \rightarrow i} \left\{ (z-i) \frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)} \right\} = \frac{e^{-m}}{2i}.$$

D'où

$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-m}}{2i} \right) = \pi e^{-m}$$

ou

$$\int_{-R}^R \frac{e^{imx}}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = \pi e^{-m}$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{\cos mx}{x^2+1} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin mx}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = \pi e^{-m}.$$

Puisque

$$\int_{-R}^R \frac{\sin mx}{x^2+1} dx = 0 \text{ et } \int_{-R}^R \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = 2 \int_0^R \frac{\cos mx}{x^2+1} dx,$$

on aura

$$2 \int_0^R \frac{\cos mx}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = \pi e^{-m}.$$

Si l'on fait tendre R vers $+\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{imR e^{i\theta}}}{(R e^{i\theta})^2 + 1} d\theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{imR \cos \theta} e^{-mR \sin \theta}}{(R e^{i\theta})^2 + 1} d\theta = 0,$$

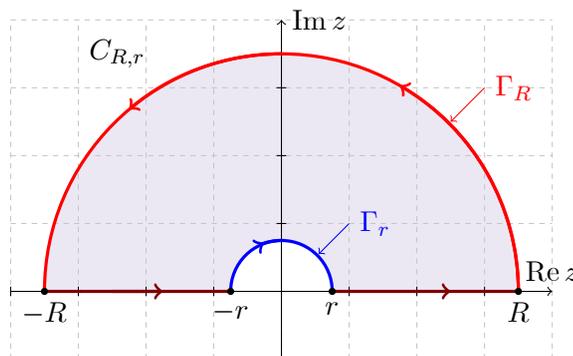
on obtient le résultat demandé. i.e. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$.

Exercice 6 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Solution.

La méthode de l'exercice 5 nous conduit à considérer l'intégrale de $\frac{e^{iz}}{z}$ le long du contour de la figure de l'exercice 3. Toutefois étant donné que $z = 0$ appartient au contour d'intégration et qu'une singularité ne peut appartenir à un tel contour, on modifie celui-ci en évitant le point $z = 0$ comme il est montré à la figure



ci-contre ; on obtient ainsi le contour $C_{R,r} = [-R, -r] \cup \Gamma_r \cup [r, R] \cup \Gamma_R$ où Γ_r et Γ_R sont des demi cercles centrés à l'origine de rayons r et R .

Le point $z = 0$ étant à l'extérieur de $C_{R,r}$, on a $\oint_{C_{R,r}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ ou

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

En changeant x en $-x$ dans la première intégrale et en combinant avec la troisième, on trouve

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

ou

$$2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \quad (2)$$

On fait tendre $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. La deuxième intégrale du second membre tend vers zéro car

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R e^{i\theta}} R i e^{i\theta} d\theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi i e^{iR \cos\theta} e^{-R \sin\theta} d\theta = 0.$$

Si l'on pose $z = r e^{i\theta}$ dans la première intégrale du deuxième membre de (2), on voit que sa limite est

$$- \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{e^{i r e^{i\theta}}}{r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 i e^{i r e^{i\theta}} d\theta = \pi i$$

par passage à la limite sous le symbole d'intégration.

On a donc

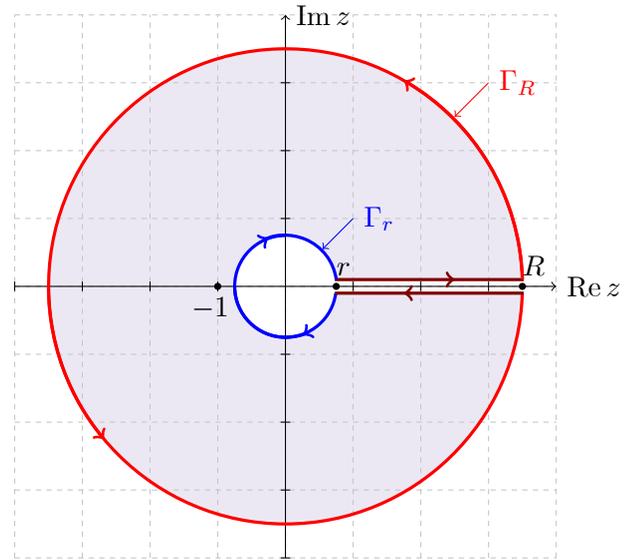
$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = \pi i \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 7 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1.$

Solution.

Considérons $\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz$. Le point $z = 0$ étant un point de branchement, on utilisera le contour $C = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ de la figure ci-contre, Γ_r et Γ_R sont des cercles centrés à l'origine de rayons r et R , où l'axe réel positif est la coupure et où $[r, R]$ et $[R, r]$ coïncident avec l'axe des x mais sont montrés séparés pour une meilleure compréhension.



La fonction que l'on intègre a un pôle simple $z = -1$ intérieur à C .

Le résidu en $z = -1$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z + 1) \frac{z^{p-1}}{1+z} = (-1)^{p-1} = (e^{\pi i})^{p-1} = e^{(p-1)\pi i}.$$

On a donc $\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$ ou

$$\int_{[r,R]} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{[R,r]} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{\Gamma_r} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}.$$

On peut donc écrire

$$\int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{(R e^{i\theta})^{p-1}}{1 + R e^{i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta + \int_R^r \frac{(x e^{2\pi i})^{p-1}}{1 + x e^{2\pi i}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(r e^{i\theta})^{p-1}}{1 + r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = 2\pi i e^{(p-1)\pi i},$$

où l'on a posé $z = x e^{2\pi i}$ pour l'intégrale le long de $[R, r]$, l'argument de z ayant augmenté de 2π en parcourant le cercle Γ_R .

Si l'on prend la limite quand $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$, remarquant que la deuxième et la quatrième intégrales tendent vers zéro, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_{+\infty}^0 \frac{e^{2\pi i(p-1)} x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

ou

$$(1 - e^{2\pi i(p-1)}) \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

si bien que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-(p-1)\pi i} - e^{\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-p\pi i} e^{\pi i} - e^{\pi i p} e^{-\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i p} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Exercice 8 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Ch}(ax)}{\text{Ch } x} dx = \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$, où $|a| < 1$.

Solution.

Considérons $\int_C \frac{e^{az}}{\text{Ch } z} dz$ où C est un rectangle de sommets $-R$, R , $R + \pi i$, $-R + \pi i$, voir figure ci-contre.

Les pôles de $\frac{e^{az}}{\text{Ch } z}$ sont simples et sont obtenus pour $\text{Ch } x = 0$, i.e. $z = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le seul pôle situé à l'intérieur de C est $\frac{i\pi}{2}$.

Le résidu de $\frac{e^{az}}{\text{Ch } z}$ en $z = \frac{i\pi}{2}$ est

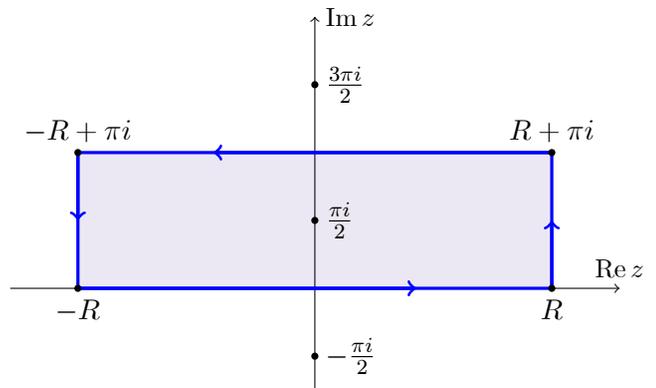
$$\lim_{z \rightarrow \frac{i\pi}{2}} \left(z - \frac{i\pi}{2}\right) \frac{e^{az}}{\text{Ch } z} = \frac{e^{a \frac{i\pi}{2}}}{\text{Sh}\left(\frac{i\pi}{2}\right)} = \frac{e^{a \frac{i\pi}{2}}}{i \sin \frac{\pi}{2}} = -i e^{a \frac{i\pi}{2}}.$$

On a donc d'après le théorème des résidus,

$$\int_C \frac{e^{az}}{\text{Ch } z} dz = 2\pi i \left(-i e^{a \frac{i\pi}{2}}\right) = 2\pi e^{a \frac{i\pi}{2}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\text{Ch } x} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\text{Ch}(R+iy)} idy + \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+\pi i)}}{\text{Ch}(x+\pi i)} dx + \int_{\pi}^0 \frac{e^{a(-R+iy)}}{\text{Ch}(-R+iy)} idy = 2\pi e^{a \frac{i\pi}{2}}. \quad (3)$$



Quand $R \rightarrow +\infty$ la deuxième et la quatrième intégrale du premier membre tendent vers zéro.

Pour montrer cela considérons la deuxième intégrale ; de

$$|\operatorname{Ch}(R + iy)| = \left| \frac{e^{R+iy} + e^{-R-iy}}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \{ |e^{R+iy}| - |e^{-R-iy}| \} = \frac{1}{2} (e^R - e^{-R}) \geq \frac{1}{4} e^R,$$

on déduit

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{a(R+iy)}}{\operatorname{Ch}(R+iy)} i dy \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{aR}}{\frac{1}{4} e^R} dy = 4\pi e^{(a-1)R}$$

et le résultat en découle si l'on remarque que le second membre tend vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$

car $|a| < 1$.

De la même façon on peut montrer que la quatrième intégrale du premier membre de (3) tend

vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$. L'égalité (3) devient alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx + e^{a\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx \right\} = 2\pi e^{a \frac{i\pi}{2}}$$

ou

$$(1 + e^{a\pi i}) \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx = 2\pi e^{a \frac{i\pi}{2}}$$

car $\operatorname{Ch}(x + \pi i) = \operatorname{Ch} x$. On a donc

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx = \frac{2\pi e^{a \frac{i\pi}{2}}}{1 + e^{a\pi i}} = \frac{2\pi}{e^{-a \frac{i\pi}{2}} + e^{a \frac{i\pi}{2}}} = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}.$$

De

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$$

on tire en changeant x en $-x$ dans la première intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{\operatorname{Ch} x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Ch}(ax)}{\operatorname{Ch} x} dx = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)},$$

d'où l'on déduit le résultat cherché.

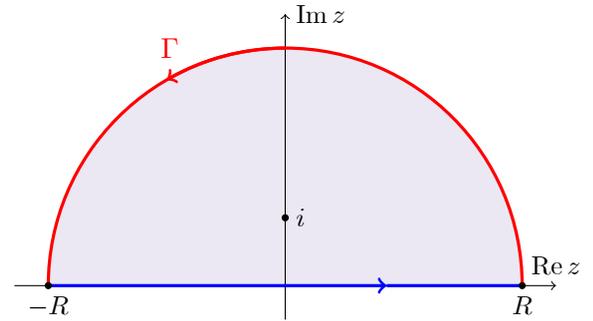
Exercice 9 :

Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx = \pi \ln 2$.

Solution.

On considère $\oint_C \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1} dz$ le long du contour C formé d'une portion de l'axe réel de $-R$ à R et du demi-cercle Γ de rayon R , voir figure ci-contre. Le seul pôle de $\frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1}$ intérieur à C est le pôle simple $z = i$, et le résidu est

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{\text{Log}(z+i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{\text{Log}(2i)}{2i}.$$



On a donc d'après le théorème des résidus

$$\oint_C \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = 2\pi i \text{Res}(f, i) = 2\pi i \left(\frac{\text{Log}(2i)}{2i} \right) = \pi \text{Log}(2i) = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i,$$

en utilisant la détermination principale du logarithme. Ce résultat peut s'écrire sous la forme

$$\int_{-R}^R \frac{\text{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i$$

ou

$$\int_{-R}^0 \frac{\text{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\text{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i.$$

En changeant x en $-x$ dans la première intégrale, on obtient

$$\int_0^R \frac{\text{Log}(i-x)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\text{Log}(i+x)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i,$$

où puisque $\text{Log}(i-x) + \text{Log}(i+x) = \text{Log}(i^2 - x^2) = \text{Log}(x^2 + 1) + \pi i$,

$$\int_0^R \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\pi i}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i.$$

Quand $R \rightarrow +\infty$ l'intégrale le long de Γ tend vers zéro car

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Gamma} \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1} dz \right| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{\pi} \frac{\text{Log}(R e^{it} + i)}{R^2 e^{2it} + 1} R i e^{it} dt \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| 4\pi \frac{\text{Log}(R+1) + 2\pi}{R^2 - 1} R \right| = 0.$$

On a alors en prenant les parties réelles et imaginaires

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \ln 2.$$